GOVERNO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
CÂMPUS JUAZEIRO/BA COLEG. DE ENG. ELÉTRICA
PROF. PEDRO MACÁRIO DE MOURA
CÁLCULO I – 2015.2

Discente ____ **CPF** | | | | | | | | | | | |

Turma A1 – Sala NT 02 CCA – Data 30 de Novembro de 2015

Limites Fundamentais

Daremos a seguir três proposições que caracterizam os chamados limites fundamentais. Trataremos o caso particular de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}, 1^{\infty}$ e ∞^{0}.

Primeiro Limite Fundamental $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$

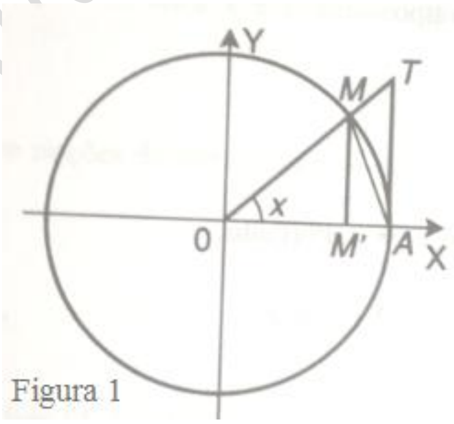

Figura 1

Demonstração:

Considere a circunferência de raio 1 (Figura 1)

Seja x a medida em radianos do arco $\widehat{AOM}$. Limitamos a variação de x ao intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Observando a Figura 1, escrevemos as desigualdades equivalentes:

Área $\Delta MOA <$ área setor $MOA <$ área $\Delta AOT \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{OA} * \overrightarrow{MM'}}{2} < \frac{\overrightarrow{OA} * \overrightarrow{AM}}{2} < \frac{\overrightarrow{OA} * \overrightarrow{AT}}{2} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{MM'} < \overrightarrow{AM} < \overrightarrow{AT} \Rightarrow senx < x < tgx$. Dividindo a última desigualdade por $senx$, já que $senx > 0, \forall \in x \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, temos $\frac{senx}{senx} < \frac{x}{senx} < \frac{\frac{senx}{cosx}}{senx} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{cosx}$. Agora aplicando limite na desigualdade e fazendo x tende à zero vem:

$$\lim_{x\to 0} 1 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{senx} < \lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx}$$

$$1 > \lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} > cos0$$

$1 < \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{senx} < 1$. Então podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{senx} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$

Segundo Limite Fundamental $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

Demonstração:

Nosso objetivo é provar que a sequência de termo geral

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

É convergente. Definiremos, então, o numero e como sendo o limite de tal sequência.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Considere a expansão binominal

$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\left(\frac{n(n-1)}{2!}\right)a^{n-2}b^2+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\right)a^{n-3}b^3+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n$

Então temos $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\Rightarrow 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\Rightarrow 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n^n}\frac{1}{n!}$$

Quando aplicamos limite com n tendendo ao infinito ficamos com:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$

Então, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Da consequência dessa convergência podemos também ter

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e$$

Terceiro limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ **com** $(0<a\neq 1)$

Demonstração:

Façamos $t=a^x-1 \therefore a^x=t+1$, aplicando os logaritmo neperianos em ambos os lados da igualdade, ficamos com $\ln a^x=\ln(t+1)\Rightarrow x\ln a=\ln(t+1)\Rightarrow x=\frac{\ln(t+1)}{\ln a}$quando $x\to 0$. $x\neq 0$ temos que $t\to 0$, $t\neq 0$ e então podemos escrever

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}\Rightarrow \ln a*\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}}\Rightarrow \ln a*\frac{\lim\limits_{t\to 0}1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\Rightarrow \ln a*\frac{1}{\ln e}$$

Donde

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

Lista – 01: Exercícios Limites Fundamentais

01. Evaluar para $x\to 0$, las expresiones:

a) $\lim\frac{a^x-1}{b^x-1}$ b) $\lim\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x}$ c) $\lim\frac{e^{-2x}-2e^{-2x}+1}{x^2}$

d) $\lim\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$ e) $\lim\frac{x(2x-7\cos x)}{3x^2-5\operatorname{sen}x}$ f) $\lim\frac{x+\operatorname{sen}2x}{x-\operatorname{sen}2x}$

Nos exercícios 2-39, utilize um dos limites fundamentais para determinar o limite ou sua tendência.

02. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{2x}-4*2^x+4}{2^x-2}$ 03. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{-2^x+1}$ 04. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x}$

05. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$ 06. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}}$ 07. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x}$

08. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\operatorname{sen}(x+\frac{5\pi}{6})}{\operatorname{cotg}^3x-3\operatorname{cotg}x}$ 09. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+x}{x}$ 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x-1}}{1-e^{3x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^n-1)}{x^m-1}$ 12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}-2\operatorname{sen}x}{x-\frac{\pi}{3}}$ 13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+m}{x}\right)^x$ 15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{x}\right)^{1+x}$ 16. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{6^x-36}{x-2}$

17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{ta2x}{x-\frac{x}{2}}$

18. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos(2x)-1}{\cos(x)-1}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{\frac{x}{3}}$

20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-senx}{2x-\pi}$

21. $\lim\limits_{x\to0} \frac{sen\left(x^2+\frac{1}{x}\right)-sen\frac{1}{x}}{x}$

22. $\lim\limits_{x\to p^-} \frac{secx-secp}{x-p}$

23. $\lim\limits_{x\to a} \frac{senx-sena}{x-a}$

24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-senx}{2x-\pi}$

25. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-sen3x}{x+sen2x}$

26. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}-2senx}{x-\frac{\pi}{3}}$

27. $\lim\limits_{x\to3} \frac{e^{x-3}-1}{2x-6}$

28. $\lim\limits_{x\to0} \frac{13^x-8^x}{x}$

29. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{3x}-1}{e^{-x}-1}$

30. $\lim\limits_{x\to0} \frac{3\ln(x+1)}{2x}$

31. $\lim\limits_{x\to0} \frac{ln(3x+1)}{2x}$

32. $\lim\limits_{x\to0} \frac{log_2(x+1)}{x}$

33. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}-e^x}{-5x}$

34. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3}{e^{x+3}-e^3}$

35. $\lim\limits_{x\to0} \frac{ax}{e^{bx}-1}$

36. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+b}, b \in \mathcal{R}$

37. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}$

38. $\lim\limits_{x\to1} arcsen\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)$

39. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{sen\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1}{x-\frac{\pi}{6}}$ Sugestão: $x-\frac{\pi}{6}=x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}$

Bom Estudo! Sucesso!

Bibliografia:

FLEMMING, Diva Marília e GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.** Vol. 1, 6ª ed. São Paulo: Pearson, 2006.

STEWART, James. **Cálculo.** Vol. 1, 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

ANTON, Howard, BIVENS, Irl, DAVIS, Stephen. **Cálculo.** Vol. 1, 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

THOMAS, G. B. **Cálculo.** vol. 1, 12ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.