GOVERNO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
CÂMPUS JUAZEIRO/BA COLEG. DE ENG. ELÉTRICA
PROF. PEDRO MACÁRIO DE MOURA
CÁLCULO II – 2015.2

Discente ____ **CPF** | | | | | | | | | | | |

Turma A2 – Sala NT 02 CCA – Data 30 de Novembro de 2015

Integrais Impróprias

Integrais com limites de integração infinitos

Seja f uma função contínua e não negativa em um intervalo infinito $[a, \infty)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Se $b > a$, então a área $A(b)$ sob o gráfico de f de a até b, conforme Figura 1, é dada por:

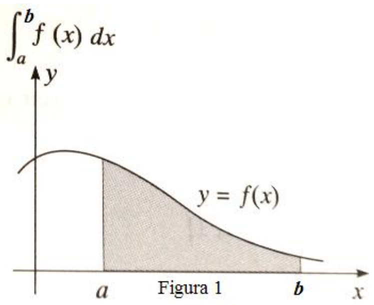


Figura 1

$$A(b) = \int_a^b f(x)dx$$

Se $\lim_{x\to\infty} A(b)$ existir, então o limite pode ser interpretado como a área da região sob o gráfico de f, acima do eixo x e à direita de $x = a$, conforme ilustrado na Figura 2. Usa-se o símbolo

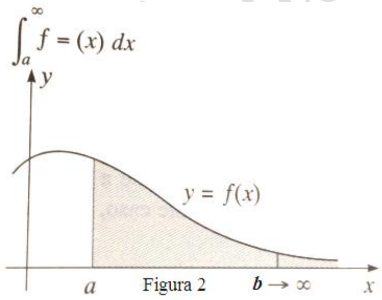


Figura 2

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

Para denotar este número. Se $\lim_{x\to\infty} A(b) = \infty$, não podemos atribuir uma área a esta região (ilimitada).

A parte (i) da próxima definição generaliza as observações precedentes para o caso em que f pode ser negativa para algum x em $[a, \infty)$.

Definição 01

Integrais com limites infinitos de integração são **integrais impróprias do tipo I**

(i) Se f é continua em $[a, \infty)$, então

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Desde que o limite exista.

(ii) Se f é continua em $(-\infty, b]$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Desde que o limite exista.

(iii) Se f é continua em $(-\infty, \infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Onde c é um constante real qualquer. Desde que as integrais impróprias à direita seja **convergentes.**

Se uma das integrais à direita em (iii) **diverge**, diz-se então que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **diverge**.

Se $f(x) \geq 0$ para todo x, então o limite na definição (ii) pode ser encarado como a área sobre o gráfico de f, acima do eixo x e à esquerda de $x = a$ (veja figura 3)

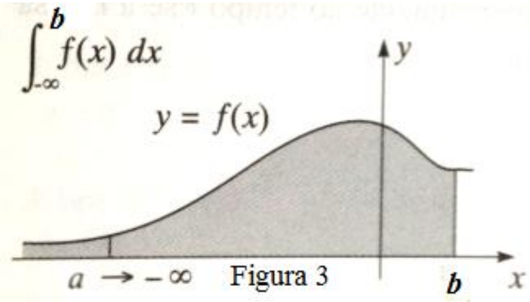
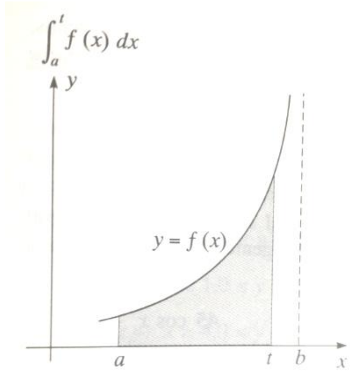


Figura 3

As expressões na Definição 01 são integrais impróprias. Elas diferem das integrais definidas pelo fato de um dos limites de integração não ser um número real. Diz-se que uma integral imprópria **converge** se o limite existe; o limite é então o valor da integral imprópria. Se o limite não existe, a integral **diverge**.

Integrais com assíntotas verticais

Outro tipo de integral imprópria surge quando o integrando tem uma assíntota vertical – uma descontinuidade infinita – em um limite de integração ou em algum ponto entre os limites de integração. Suponhamos, por exemplo, que f é não negativa no intervalo semiaberto $[a, b)$ e que $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$. Se $a < t < b$, então a área $A(t)$ sob o gráfico de a até t (Figura 4) é



$$A(t) = \int_a^t f(x)dx$$

Se $\lim_{x \to b^-} A(t)$ existe, então o limite pode ser interpretado com a área da região ilimitada sob o gráfico de f, acima do eixo x, e entre $x = a$ e $x = b$ (Figura 5). Denotaremos este número por

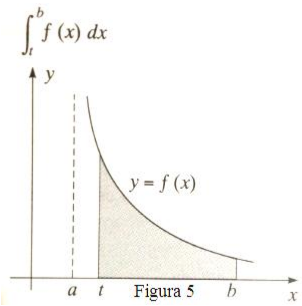


Figura 5

$$\int_a^b f(x)dx$$

Para o caso em que temos $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, e definimos $\int_a^b f(x)dx$ como o limite de $\lim_{x \to a^+} \int_t^b f(x)dx$.

Definição 02

Integrais de funções que se tornam infinitas em um ponto dentro do intervalo de integração são **integrais impróprias do tipo II**

(i) Se f é continua em $[a, b)$ e descontinua em b, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Desde que o limite exista.

(ii) Se f é continua em $(a, b]$ e descontinua em a, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Desde que o limite exista.

(iii) Se f tem uma descontinuidade em um número c do intervalo aberto (a, b), mas é contínua em todo outro ponto de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Desde que ambas as integrais impróprias à direita sejam convergentes. Se ambas convergem, então óvalo da integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é a soma dos dois valores.

Exercícios

Determine se a integral converge ou diverge; se convergir ache seu valor.

a) $\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}dx$ b) $\int_2^\infty \frac{1}{x-1}dx$ c) $\int_{-\infty}^1 e^x dx$ d) $\int_{-\infty}^\infty e^x dx$

Teorema 1 – Teste de comparação direta

Sejam f e g contínuas em $[a, \infty)$ com $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \geq a$. Então

$$1. \int_a^\infty f(x)dx \; converge \; se \qquad \int_a^\infty g(x)dx \;\; converge$$

$$2. \int_a^\infty f(x)dx \; diverge \; se \qquad \int_a^\infty g(x)dx \;\; diverge$$

Teorema 2 – Teste de comparação no limite

Se as funções positivas f e g são contínuas em $[a, \infty)$, e se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,, 0 < L < \infty,$$

Então

$$\int_a^\infty f(x)dx \; e \int_a^\infty g(x)dx$$

São ambas convergentes ou divergentes.

Nos exercícios 1-10, utilize a integração, o teste da comparação direta ou o teste da comparação no limite para testar as integrais quanto à sua convergência. Se mais de um método puder ser aplicado, use o de sua preferência.

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg\theta d\theta$

02. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cotg\theta d\theta$

03. $\int_0^{\pi} \frac{sen\theta}{\sqrt{\pi-\theta}} d\theta$

04. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cotg\theta}{(\pi-2\theta)^{\frac{1}{3}}} d\theta$

05. $\int_0^{ln2} x^{-2}e^{-1/x}dx$

06 $\int_0^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

07. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$

08. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$

09. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$

10. $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} senxdx$

Bom Estudo! Sucesso!

Bibliografia:

FLEMMING, Diva Marília e GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.** Vol. 1, 6ª ed. São Paulo: Pearson, 2006.

STEWART, James. **Cálculo.** Vol. 1, 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

ANTON, Howard, BIVENS, Irl, DAVIS, Stephen. **Cálculo.** Vol. 1, 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

THOMAS, G. B. **Cálculo.** vol. 1, 12ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.