Análise de Desempenho de Sistemas de Comunicações Digitais

Edmar José do Nascimento
(Princípios de Comunicações)

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Roteiro

Introdução

- Nos sistemas analógicos, o objetivo é tentar reproduzir no receptor a forma de onda que foi transmitida
- Assim, nos sistemas analógicos, o critério usado para avaliar o desempenho é a relação sinal-ruído na saída do receptor
- Nos sistemas digitais, o objetivo é reconhecer um determinado símbolo em um conjunto de símbolos possíveis
- Assim, o critério de desempenho passa a ser a probabilidade de erro de símbolo (ou bit - também conhecida como *bit error rate* - BER)

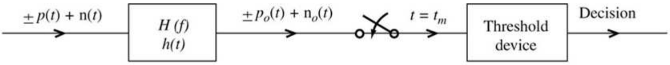
Detecção Ótima para Sinalização Polar Binária

- Na sinalização polar, se o canal for considerado sem distorção, o sinal recebido $x(t)$ no receptor é dado por

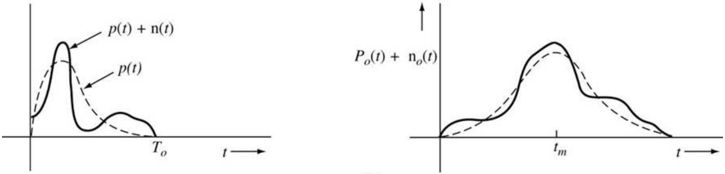
$$y(t) = \pm p(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_0$$

- Nesta expressão, $n(t)$ representa o ruído introduzido pelo canal
- O receptor deve decidir se o sinal recebido representa o bit 0 ou o bit 1
- Uma arquitetura genérica para o receptor consiste um filtro com função de transferência $H(f)$, seguido por um amostrador e um dispositivo de limiar

Detecção Ótima para Sinalização Polar Binária



(a)



(b)

Detecção Ótima para Sinalização Polar Binária

- Na saída do filtro, tem-se o sinal

$$y(t) = \pm \underbrace{p(t) * h(t)}_{p_o(t)} + \underbrace{n(t) * h(t)}_{n_o(t)} = \pm p_o(t) + n_o(t)$$

- A decisão é tomada a partir do valor de $y(t)$ em $t = t_m$, aqui designado por $r(t_m)$

$$r(t_m) = \pm p_o(t_m) + n_o(t_m)$$

- Se $n(t)$ é gaussiano com média nula, então $n_o(t_m)$ também é gaussiano com média nula

Detecção Ótima para Sinalização Polar Binária

- Definindo-se

$$\begin{aligned} A_p &= p_o(t_m) \\ \sigma_n^2 &= E\{n_o(t_m)^2\} \end{aligned}$$

- O problema de decisão binária se torna equivalente ao problema de decisão de limiar abordado anteriormente
- Assim, a regra de decisão é

$$dec\{r(t_m)\} = \begin{cases} 1 & , r(t_m) \geq 0 \\ 0 & , r(t_m) < 0 \end{cases}$$

- E a probabilidade de erro na decisão tomada é

$$P_e = Q(\rho), \quad \rho = \frac{A_p}{\sigma_n}$$

Receptor Ótimo

- P_e é minimizado se ρ ou ρ^2 é maximizado
- ρ^2 pode ser escrito como

$$\rho^2 = \frac{p_o^2(t_m)}{\sigma_n^2} = \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)P(f)e^{j2\pi f t_m} df|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|^2}{S_n(f)} df$$

- Aplicando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz, pode-se mostrar que ρ^2 é maximizado se

$$H(f) = k\frac{P(-f)e^{-j2\pi f t_m}}{S_n(f)}$$

- O filtro com essa função de transferência é chamado de filtro casado

Receptor Ótimo

- Se o ruído for branco, então $S_n(f) = \mathcal{N}/2$ e assim

$$\rho^2 = \leq \frac{2}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \frac{2E_p}{\mathcal{N}}$$

- Assim, a probabilidade de erro para o filtro ótimo com ruído branco é dada por

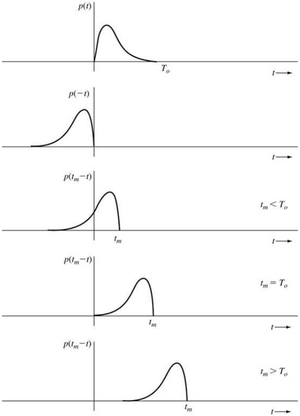
$$P_e = Q(\rho) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{\mathcal{N}}}\right)$$

- O filtro casado para o ruído branco é então dado por

$$H(f) = \underbrace{\frac{2k}{\mathcal{N}}}_{k'} P(-f)e^{-j2\pi f t_m} \Longleftrightarrow h(t) = k'p(t_m - t)$$

Receptor Ótimo

- $t_m = T_o$ concilia os requisitos de atraso mínimo e realizibilidade do filtro casado



Receptor Ótimo

- Fazendo $k' = 1$, o filtro casado para o ruído branco é dado por

$$h(t) = p(T_o - t) \Longleftrightarrow H(f) = P(-f)e^{-j2\pi f T_o}$$

- O filtro casado também pode ser implementado através de um correlator
- Como

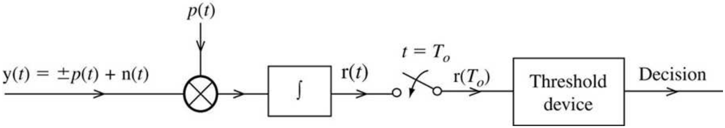
$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)p(\tau + T_o - t)d\tau$$

- Então

$$r(T_o) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)p(\tau)d\tau = \int_{0}^{T_o} y(\tau)p(\tau)d\tau$$

Receptor Ótimo

- Implementação do filtro casado através de um correlator



Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Na sinalização binária genérica considera-se que o bit 1 é transmitido pelo pulso $p(t)$, enquanto que o bit 0 por $q(t)$
- Assim, o sinal recebido é

$$y(t) = \begin{cases} p(t) + n(t) & , 0 \leq t \leq T_b \quad \text{, bit 1} \\ q(t) + n(t) & , 0 \leq t \leq T_b \quad \text{, bit 0} \end{cases}$$

- A saída do filtro receptor é amostrada em T_b, resultando em $r(T_b)$
- A regra de decisão consiste em comparar o valor de $r(T_b)$ com um limiar a_o

Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

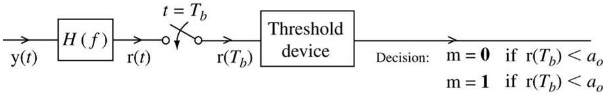
- Admitindo-se que o ruído é gaussiano com média nula, as seguintes equações são válidas

$$
\begin{aligned}
p_o(T_b) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f)H(f)e^{j2\pi f T_b} df \\
q_o(T_b) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(f)H(f)e^{j2\pi f T_b} df \\
\sigma_n^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df \\
p_{r|m}(r|1) &= \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[r - p_o(T_b)]^2}{2\sigma_n^2}\right) \\
p_{r|m}(r|0) &= \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[r - q_o(T_b)]^2}{2\sigma_n^2}\right)
\end{aligned}
$$

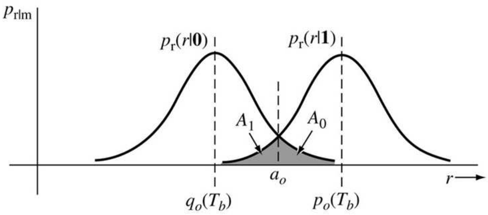
Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Se a_o for o limiar ótimo, então

$$m = \begin{cases} 0 & , r(T_b) < a_o \\ 1 & , r(T_b) > a_o \end{cases}$$



(a)



(b)

Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Admitindo-se que os bits 0 e 1 são equiprováveis, então a probabilidade de tomar a decisão errada é dada por

$$P_e = \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{a_o - q_o(T_b)}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{p_o(T_b) - a_o}{\sigma_n}\right)\right]$$

- Fazendo-se $\partial P_e / \partial a_o = 0$, o limiar ótimo é

$$a_o = \frac{p_o(T_b) + q_o(T_b)}{2}$$

- E a probabilidade de erro para esse a_o é

$$P_e = Q\left(\frac{p_o(T_b) - q_o(T_b)}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad \beta = \frac{p_o(T_b) - q_o(T_b)}{\sigma_n}$$

Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Obtendo uma equação para β^2 em função das expressões no domínio da frequência para $p_o(T_b), q_o(T_b)$ e σ_n e aplicando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz, então

$$\beta_{max}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f) - Q(f)|^2}{S_n(f)} df$$

- O filtro ótimo é dado por

$$H(f) = k \frac{[P(-f) - Q(-f)]e^{-j2\pi f T_b}}{S_n(f)}$$

Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Se além de gaussiano, o ruído for branco, então

$$\begin{aligned} H(f) &= [P(-f) - Q(-f)]e^{-j2\pi f T_b} \\ h(t) &= p(T_b - t) - q(T_b - t) \end{aligned}$$

- Ou seja, o filtro ótimo é casado à diferença $p(t) - q(t)$
- Nesse caso,

$$\begin{aligned} \beta_{max}^2 &= \frac{2}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f) - Q(f)|^2 df = \frac{2}{\mathcal{N}} \int_0^{T_b} [p(t) - q(t)]^2 dt \\ &= \frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{\mathcal{N}/2}, \quad E_{pq} = \int_0^{T_b} p(t)q(t)dt \end{aligned}$$

Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Assim, para o receptor binário genérico sujeito ao ruído branco gaussiano, a probabilidade de erro de símbolo (bit) é dada por

$$P_e = P_b = Q\left(\frac{\beta_{MAX}}{2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{2\mathcal{N}}}\right)$$

- Além disso, o limiar ótimo pode ser reescrito em função das energias de $p(t)$ e $q(t)$ como

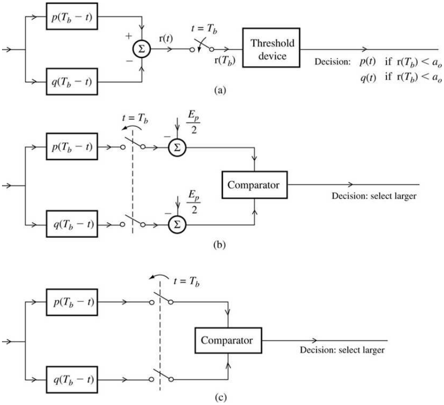
$$a_o = \frac{E_p - E_q}{2}$$

- Pode-se observar que para a sinalização polar tem-se que $E_p = E_q$ e $E_{pq} = -E_p$, resultando em $a_o = 0$, $h(t) = p(T_b - t)$ e

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{\mathcal{N}}}\right)$$

Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Possíveis realizações do filtro ótimo (no último caso, $E_p = E_q$)



Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Muitas vezes é conveniente expressar a probabilidade de erro em função da energia de bit - E_b
- E_b representa a energia média por bit de informação
- Assim, para a sinalização polar tem-se que

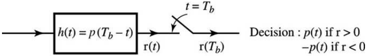
$$E_b = E_p P(m=1) + E_q P(m=0) = pE_p + (1-p)E_p = E_p$$

- Logo, para a sinalização polar

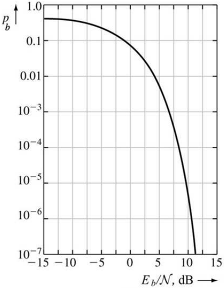
$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N}}}\right)$$

Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Limiar ótimo para sinalização polar e probabilidade de erro em função de $E_b/\mathcal{N}$



(a)



(b)

Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

- Na sinalização On-Off, $E_q = E_{pq} = 0$, resultando no limiar de detecção $a_o = E_p/2$
- Além disso, $E_b = E_p/2$ se os bits 0 e 1 forem equiprováveis
- Logo, para a sinalização On-Off, a probabilidade de erro de bit é dada por

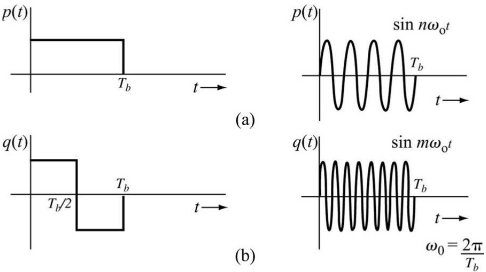
$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_p}{2\mathcal{N}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\mathcal{N}}}\right)$$

- Assim, pode-se observar que para se manter a mesma P_b é necessário 2 vezes mais energia por bit para On-Off que para a sinalização polar

Detecção Ótima para Sinalização Binária Genérica

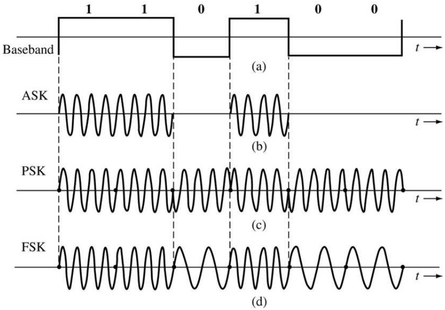
- Na sinalização ortogonal, $E_{pq} = 0$, sendo a sinalização On-Off um caso particular
- Além disso, $E_b = (E_p + E_p)/2$ se os bits 0 e 1 forem equiprováveis
- Logo, a probabilidade de erro de bit é dada por

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q}{2\mathcal{N}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\mathcal{N}}}\right)$$



Detecção Ótima para Modulações Binárias com Portadora

- O formalismo obtido para uma sinalização binária genérica pode ser usado para obter o receptor ótimo para as modulações digitais com portadora ASK, PSK e FSK



Detecção Ótima para Modulações Binárias com Portadora

- Na modulação BPSK (PSK com $M = 2$), transmite-se:

$$\begin{aligned} 1 &: \sqrt{2}p'(t)\cos(\omega_c t) \\ 0 &: -\sqrt{2}p'(t)\cos(\omega_c t) \end{aligned}$$

- Se $p(t) = \sqrt{2}p'(t)\cos(\omega_c t)$, então BPSK é equivalente à sinalização polar em que $p(t)$ e $-p(t)$ são transmitidos
- Logo, $a_o = 0$ é o limiar ótimo
- Além disso, $E_p = E_{p'}$, se $f_c T_b \gg 1$
- A probabilidade de erro é

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{\mathcal{N}}}\right)$$

Detecção Ótima para Modulações Binárias com Portadora

- Na modulação ASK binária, transmite-se:

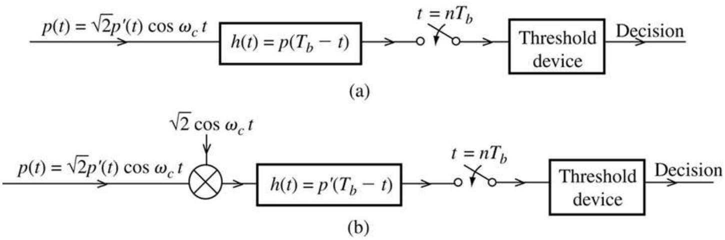
$$\begin{aligned} 1 &: \sqrt{2}p'(t)\cos(\omega_c t) \\ 0 &: 0 \end{aligned}$$

- Se $p(t) = \sqrt{2}p'(t)\cos(\omega_c t)$, então ASK é equivalente à sinalização On-Off em que $p(t)$ e $q(t) = 0$ são transmitidos
- Logo, $a_o = E_p/2$ é o limiar ótimo
- Além disso, $E_p = E_{p'}$, se $f_c T_b \gg 1$ e $E_b = E_p/2$
- A probabilidade de erro é

$$P_b = Q(\sqrt{\frac{E_b}{\mathcal{N}}})$$

Detecção Ótima para Modulações Binárias com Portadora

- Tanto PSK quanto ASK podem ser detectadas através de um filtro casado
- Além da implementação convencional do filtro casado, pode-se utilizar a outra alternativa mostrada abaixo



Detecção Ótima para Modulações Binárias com Portadora

- Na modulação FSK, transmite-se:

$$
\begin{aligned}
1 &: \sqrt{2}p'(t)\cos\left[\omega_c - (\Delta\omega/2)\right]t \\
0 &: \sqrt{2}p'(t)\cos\left[\omega_c + (\Delta\omega/2)\right]t
\end{aligned}
$$

- O limiar ótimo é $a_o = 0$ (pulsos com mesma energia e equiprováveis)
- Se $p'(t) = A$ (pulso retangular), então:

$$
\begin{aligned}
E_{pq} &= A^2 T_b sinc(\Delta\omega T_b), \;\; (\omega_c T_b \gg 1) \\
E_b &= E_p = E_q = A^2 T_b \\
P_b &= Q\left(\sqrt{\frac{E_b - E_b sinc(\Delta\omega T_b)}{\mathcal{N}}}\right)
\end{aligned}
$$

Detecção Ótima no Espaço de Sinais

- A análise da detecção para sinais binários é relativamente simples
- Para sistemas digitais M-ários é necessário partir para uma abordagem geométrica a fim de simplificar a análise
- Para uma transmissão M-ária com ruído de canal $n(t)$ e saída

$$y(t) = p_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_o, \quad i = 1, \cdots, M$$

- Procura-se obter o receptor ótimo que resulta em uma probabilidade de erro mínima

Espaço Geométrico de Sinais

- Um conjunto de M sinais em um sistema M-ário pode ser representado por vetores (pontos) em um hiperespaço de n dimensões ($n \leq M$)
- Um vetor $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n$ em um espaço n-dimensional pode ser representado como uma combinação de n vetores unitários

$$\mathbf{x} = x_1\varphi_1 + \cdots + x_n\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\varphi_k$$

- Nesse espaço vetorial, o produto interno entre dois vetores é dado por

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Espaço Geométrico de Sinais

- A norma de um vetor é dada por

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{<\mathbf{x},\mathbf{x}>} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

- Vetores são ortogonais se o seu produto interno é nulo
- Vetores são normais se a sua norma é unitária
- Uma base para o espaço vetorial de dimensão n é formada por n vetores linearmente independentes
- Se os vetores de base são ortonormais, a base é dita ser ortonormal

Espaço Geométrico de Sinais

- Analogamente, um conjunto de sinais ortonormais $\{\varphi_i(t)\}$ no intervalo $t \in \Theta$ é definido como

$$< \varphi_j(t), \varphi_k(t) > = \int_{t\in\Theta} \varphi_j(t)\varphi_k^*(t)dt = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

- Se o conjunto for completo, então todo sinal nesse espaço pode ser expresso como

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k x_k \varphi_k(t), \quad t \in \Theta \\ x_k &= \int_{t\in\Theta} x(t)\varphi_k^*(t)dt \end{aligned}$$

Espaço Geométrico de Sinais

- A partir de uma base ortonormal de sinais $\{\varphi_k(t)\}$, o produto interno e a energia de um sinal podem ser relacionadas com operações similares em vetores
- Sejam $x(t)$ e $y(t)$ dois sinais, então

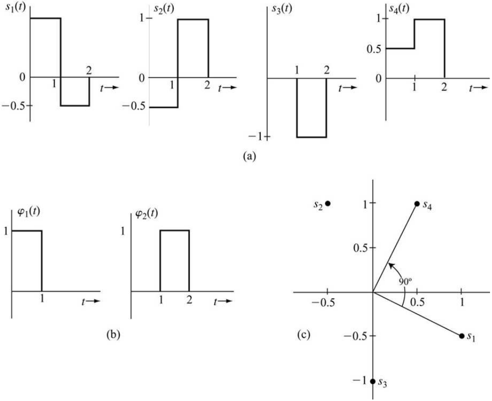
$$x(t) = \sum_i x_i \varphi_i(t), \quad y(t) = \sum_j y_j \varphi_j(t)$$

- Então

$$\begin{aligned} < x(t), y(t) > &= \int_{t\in\Theta} x(t)y(t)dt = \sum_k x_k y_k =< \mathbf{x}, \mathbf{y} > \\ E_x &= \int_{t\in\Theta} x^2(t)dt =< \mathbf{x}, \mathbf{x} >= ||\mathbf{x}||^2 \end{aligned}$$

Espaço Geométrico de Sinais

- Representação de 4 sinais em uma base ortonormal no intervalo $t \in (0, 2)$
- $s_1(t)$ e $s_4(t)$ são ortogonais



Representação Vetorial do Ruído Branco

- Sinais determinísticos como aqueles vistos no exemplo anterior podem ser representados em uma base ortonormal
- A obtenção desta base pode ser feita com o procedimento de Gram-Schmidt
- Entretanto, a obtenção de funções de base para um processo aleatório não é tão evidente
- Para que uma base $\{\varphi_k(t)\}$ possa representar um processo aleatório $x(t)$, é necessário que ela verifique a expansão de *Karhunen-Löeve* dada por

$$\lambda_i.\varphi_i(t) = \int_0^{T_o} R_x(t, t_1).\varphi_i(t_1)dt_1, \quad 0 \leq t \leq T_o$$

Representação Vetorial do Ruído Branco

- Essa equação é similar a equação linear que define os autovalores de uma matriz
- Quando $x(t)$ é um processo de ruído branco estacionário no sentido amplo, então

$$R_x(t, t_1) = \frac{\mathcal{N}}{2}\delta(t - t_1)$$

- Assim,

$$\lambda_i.\varphi_i(t) = \frac{\mathcal{N}}{2}\varphi_i(t), \quad 0 \leq t \leq T_o$$

- Assim, qualquer conjunto completo de funções de base satisfaz essa equação com $\lambda_i = \mathcal{N}/2$

Representação Vetorial do Ruído Branco

- Para um sistema M-ário que pode ser representado em uma base $\varphi_k(t)$, tem-se que

$$s_i(t) = \sum_k s_{i,k}\varphi_k(t), \quad i = 1, \cdots, M$$

- Nesta base, o ruído branco do canal é representado como

$$n_w(t) = \sum_k n_k\varphi_k(t), \quad 0 \leq t \leq T_o$$

- Assim, quando o transmissor envia $s_i(t)$, o sinal recebido pode ser decomposto como

$$y(t) = s_i(t) + n_w(t) = \sum_k s_{i,k}\varphi_k(t) + \sum_k n_k\varphi_k(t) = \sum_k y_k\varphi_k(t)$$

Representação Vetorial do Ruído Branco

- Em que

$$y_k = \int_0^{T_o} y(t)\varphi_k^*(t)dt = s_{i,k} + n_k$$

- É recebido se $s_i(t)$ for enviado
- Assim, o sinal de saída é representado por um vetor de variáveis aleatórias $\{y_k\}$
- O receptor ótimo deve decidir qual sinal foi transmitido dado o vetor $\{y_k\}$ recebido

Representação Vetorial do Ruído Branco

- Representação geométrica de um processo aleatório (cada ponto representa uma função amostra do processo)