

Processos Aleatórios

Edmar José do Nascimento
(Princípios de Comunicações)

<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Densidade Espectral de Potência
- 3 Processos Aleatórios Passa-Faixa

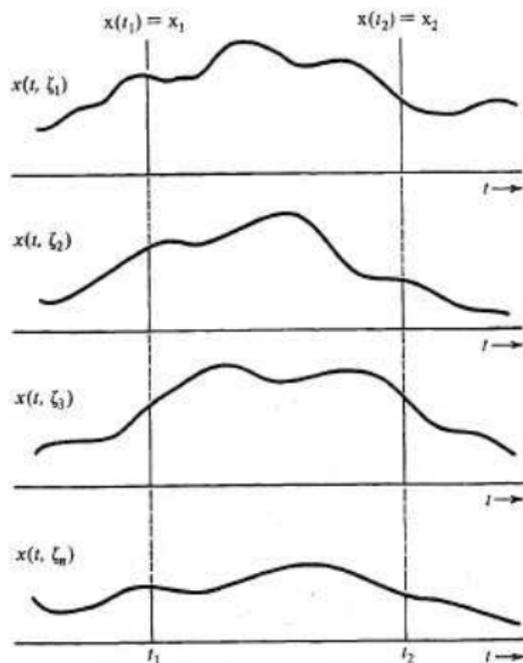
Processos Aleatórios

- Os processos aleatórios também são denominados de **processos estocásticos** e representam uma extensão do conceito de variável aleatória para sistemas dinâmicos (que dependem do tempo)
- O seguinte exemplo ilustra esse conceito:
 - A temperatura ao meio dia pode ser representada por uma variável aleatória
 - Para obter a fdp dessa variável aleatória é necessário repetir a medida da temperatura diversas vezes no mesmo horário
 - A temperatura em outro horário provavelmente terá uma fdp diferente da temperatura ao meio dia

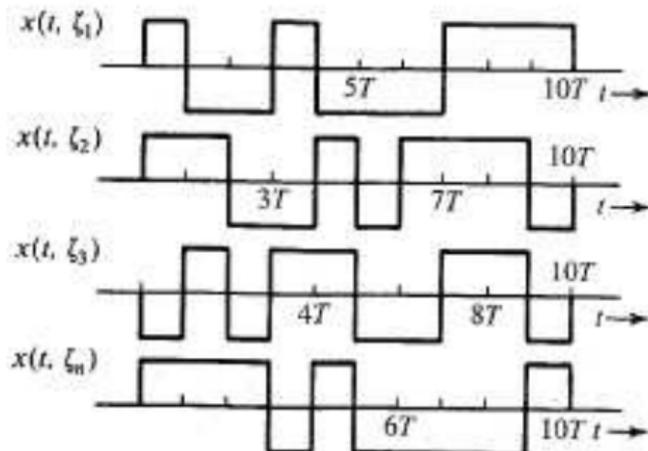
Processos Aleatórios

- A conclusão obtida a partir do exemplo precedente é que a temperatura é uma variável aleatória dependente do tempo, ou seja, um processo aleatório
- Outros exemplos de processos aleatórios são:
 - A tensão na saída de um resistor
 - A pontuação na bolsa de valores
- Um processo aleatório $x(t)$ é caracterizado por uma família (ensemble) de funções amostras

Processos Aleatório Representando a Temperatura



Processos Aleatório Representando a Saída de um Gerador



Processos Aleatórios

- Cada função amostra é representada por $x(t, \xi_i)$, em que ξ_i representa o dia em que a temperatura foi medida para o exemplo da temperatura
- $x_i = x(t_i)$ é uma variável aleatória representando as amplitudes do processo aleatório no instante t_i
- x_i é completamente caracterizada pela sua fdp denotada por $p_{x_i}(x_i)$
- $x(t_i, \xi_i)$ representa apenas um valor obtido para o processo aleatório no tempo t_i para a realização ξ_i

Processos Aleatórios

- Um processo aleatório pode ser completamente especificado através de uma expressão analítica
 - $x(t) = A \cos(\omega_c t + \Theta)$, sendo Θ uma variável aleatória uniforme na faixa $(0, 2\pi)$ é completamente caracterizado por essa expressão
- Entretanto, na maioria das vezes, as famílias de funções amostras só são obtidas experimentalmente
- O processo aleatório pode ser especificado por uma coleção de variáveis aleatórias dependentes do tempo

Processos Aleatórios

- Se considerarmos n instantes de tempo, obtém-se n variáveis aleatórias (x_1, x_2, \dots, x_n)
- Essas n variáveis aleatórias são completamente caracterizadas pela sua fdp conjunta $p_{x_1 x_2 \dots x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para todo n
 - A integração da fdp conjunta fornece as fdps de ordem mais baixa
 - A tarefa de obtenção da fdp conjunta é extremamente complicada e as vezes, impossível
- Felizmente, para os processos aleatórios relevantes, é suficiente conhecer a sua média e a sua autocorrelação

Estatísticas de um Processo

- A média ou valor esperado de um processo aleatório $x(t)$ é uma função do tempo dada por

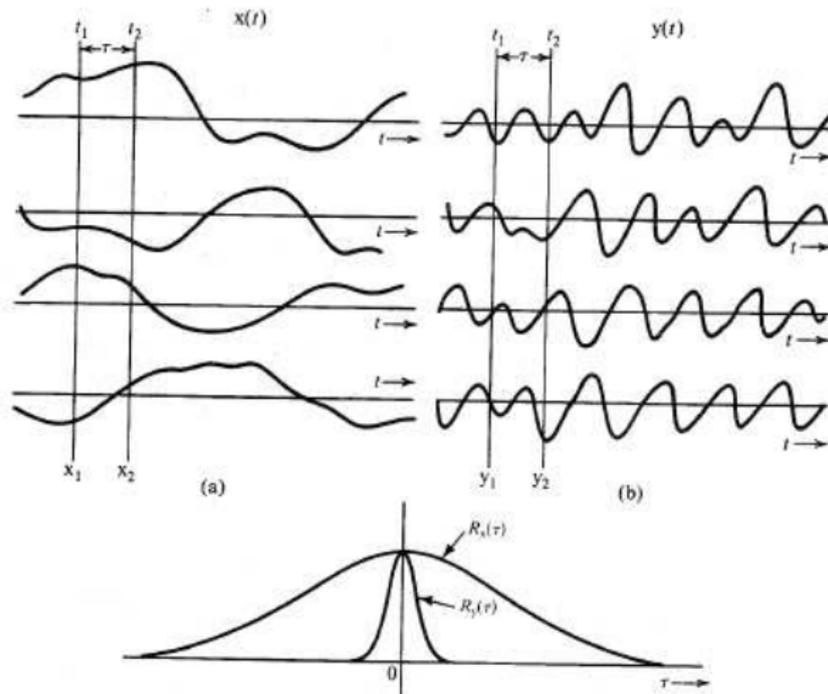
$$\overline{x(t)} = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x; t)dx$$

- A função de autocorrelação é dada pela correlação entre duas variáveis aleatórias nos instantes t_1 e t_2 : $x(t_1)$ e $x(t_2)$

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \overline{x(t_1)x(t_2)} = \overline{x_1x_2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2p_{x_1x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2 \end{aligned}$$

- A autocorrelação é uma média na família de funções amostras

Função de Autocorrelação



Classificação dos Processos Aleatórios

- Os processos aleatórios podem ser classificados como **estacionários** ou **não estacionários**
 - Em um processo estacionário no sentido estrito, as características estatísticas não mudam com o tempo
 - $p_x(x; t)$ é independente de t
 - $R_x(t_1, t_2)$ depende apenas da diferença $\tau = t_2 - t_1$ e não de t_1 e t_2 especificamente

$$\begin{aligned} p_x(x; t) &= p_x(x) \\ R_x(t_1, t_2) &= R_x(t_2 - t_1) \implies R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t + \tau)} \end{aligned}$$

Classificação dos Processos Aleatórios

- É difícil verificar se um processo aleatório é estritamente estacionário na prática
- Por essa razão, se utiliza a definição de **processo aleatório estacionário no sentido amplo**
- Um processo é estacionário no sentido amplo se:

$$\begin{aligned}\overline{x(t)} &= \text{constante} \\ R_x(t_1, t_2) &= R_x(\tau) \quad \tau = t_1 - t_2\end{aligned}$$

Processos Estacionários

Exemplo 11.1

Mostre que o processo aleatório $x(t) = A \cos(\omega_c t + \Theta)$ sendo Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$ é um processo estacionário no sentido amplo.

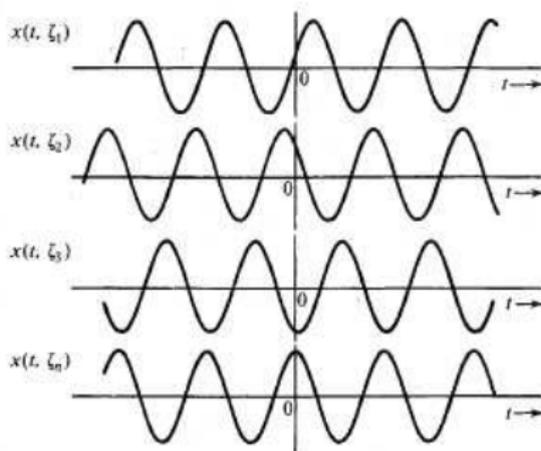


Figure 11.5 Ensemble for the random process $A \cos(\omega_c t + \Theta)$.

Processos Estacionários

Exemplo 11.1 - Solução

Para calcular $\overline{x(t)}$ pela definição é necessário determinar $p_x(x, t)$, o que não é tão simples. Uma maneira mais simples é fazer:

$$\overline{x(t)} = \overline{A \cos(\omega_c t + \Theta)} = \overline{A \cos(\omega_c t + \Theta)}$$

Como $\cos(\omega_c t + \Theta)$ é uma função da variável aleatória Θ , então:

$$\begin{aligned}\overline{\cos(\omega_c t + \Theta)} &= \int_0^{2\pi} \cos(\omega_c t + \theta) p_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_c t + \theta) d\theta = 0\end{aligned}$$

Processos Estacionários

Exemplo 11.1 - Solução

Então:

$$\overline{x(t)} = 0$$

Para concluir a demonstração, é necessário mostrar que $R_x(t_1, t_2)$ depende apenas de $t_2 - t_1$

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \overline{A^2 \cos(\omega_c t_1 + \Theta) \cos(\omega_c t_2 + \theta)} \\ &= \frac{A^2}{2} \{ \overline{\cos[\omega_c(t_2 - t_1)]} + \overline{\cos[\omega_c(t_2 + t_1) + 2\Theta]} \} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos[\omega_c(t_2 - t_1)] = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c T \end{aligned}$$

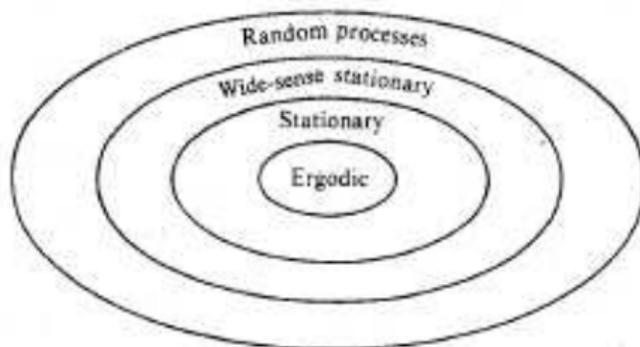
Classificação dos Processos Aleatórios

- Uma outra classificação importante para processos aleatórios é a dos **processos ergódicos**
- Um processo é ergódico se as médias temporais (para uma função amostra em particular) são iguais às médias estatísticas (tomadas sobre uma família de funções amostras)
- Para processos ergódicos, as seguintes relações são verificadas:

$$\overline{x(t)} = \widetilde{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$R_x(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt$$

Classificação dos Processos Aleatórios



Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- Sinais aleatórios são sinais de potência $t \in (-\infty, \infty)$
- A DEP de um processo aleatório pode ser definida como a média da DEP de uma família de funções amostras
- Para um sinal determinístico $x(t)$, a DEP é dada por:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$$

- Sendo que,

$$x_T(t) = x(t)u\left(\frac{t}{T}\right) \iff X_T(\omega)$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- Para um sinal aleatório $x(t)$, a DEP é dada por:

$$\begin{aligned}
 S_x(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\left[\frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \right]} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\left[\left| \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \right]} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\left[\left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \right]} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\left[\left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \right)^* \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right) \right]}
 \end{aligned}$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

$$\begin{aligned}
 S_x(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\left[\left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \right) \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right) \right]} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) \text{rect}\left(\frac{t_1}{T}\right) e^{j\omega t_1} dt_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t_2) \text{rect}\left(\frac{t_2}{T}\right) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right) \right]} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t_1}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t_2}{T}\right) x(t_1) x(t_2) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \right]} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t_1}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t_2}{T}\right) \overline{x(t_1) x(t_2)} e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t_1}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t_2}{T}\right) R_x(t_1, t_2) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t_1}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t_2}{T}\right) R_x(t_2 - t_1) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- Fazendo-se a mudança de variáveis: $t = t_1, \tau = t_2 - t_1$
- Então: $dtd\tau = |\det(J)|dt_1 dt_2$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \implies \det(J) = 1 \implies dtd\tau = dt_1 dt_2$$

- Substituindo-se, tem-se:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{T}\right) R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} dtd\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{T}\right) dt \right) d\tau \end{aligned}$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- A integral entre parênteses é a convolução entre dois retângulos de largura T , sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} (T - |\tau|) \text{rect}\left(\frac{\tau}{2T}\right) d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

- O resultado anterior corresponde ao teorema de Wiener-Kintchine, que estabelece que se $x(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo, então:

$$S_x(\omega) = \mathcal{F}[R_x(\tau)]$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- Algumas propriedades importantes podem ser verificadas
 - Para processos reais, a autocorrelação é uma função par:

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

- A autocorrelação em $\tau = 0$ é dada por:

$$R_x(0) = \overline{x(t)x(t)} = \overline{x^2(t)} = \overline{x^2}$$

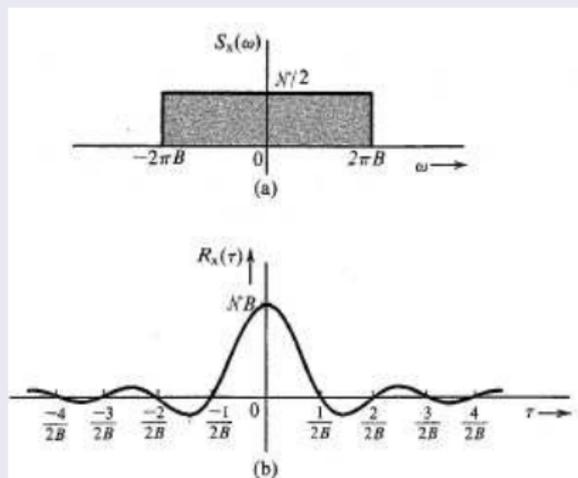
- A potência de $x(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} P_x &= \overline{x^2} = R_x(0) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \right]_{\tau=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Ruído Branco Passa-Baixas

Exemplo 11.2

Determinar $R_x(\tau)$ e a potência P_x para um processo aleatório $x(t)$, sendo $x(t)$ um processo de ruído branco passa-baixas com DEP $S_x(\omega) = \mathcal{N}/2$



Ruído Branco Passa-Baixas

Exemplo 11.2 - Solução

$$S_x(\omega) = \frac{\mathcal{N}}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right)$$

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(\omega)\} = \frac{\mathcal{N}}{2} \frac{2\pi B}{\pi} \text{sinc}(2\pi B\tau) = \mathcal{N} B \text{sinc}(2\pi B\tau)$$

$$P_x = R_x(0) = \mathcal{N} B \text{ ou } P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{\mathcal{N}}{2} d\omega = \mathcal{N} B$$

Processo Aleatório Senoidal

Exemplo 11.3

Determinar a DEP e o valor médio quadrático de $x(t) = A \cos(\omega_c t + \Theta)$, sendo Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$.

Exemplo 11.3 - Solução

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c \tau$$

$$S_x(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$$

$$P_x = \overline{x^2} = R_x(0) = \frac{A^2}{2}$$

Processo Aleatório Senoidal

Exemplo 11.3

Determinar a DEP e o valor médio quadrático de $x(t) = A \cos(\omega_c t + \Theta)$, sendo Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$.

Exemplo 11.3 - Solução

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c \tau$$

$$S_x(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$$

$$P_x = \overline{x^2} = R_x(0) = \frac{A^2}{2}$$

Modulação AM

Exemplo 11.4

Determinar a função de autocorrelação e a DEP do processo aleatório modulado em AM-DSB-SC $\varphi(t) = m(t) \cos(\omega_c t + \Theta)$, sendo $m(t)$ um processo aleatório estacionário no sentido amplo e Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$ independente de $m(t)$.

Modulação AM

Exemplo 11.4 - Solução

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi}(\tau) &= \overline{\varphi(t)\varphi(t+\tau)} \\
 &= \overline{m(t)\cos(\omega_c t + \Theta)m(t+\tau)\cos(\omega_c(t+\tau) + \Theta)} \\
 &= \overline{m(t)m(t+\tau)\cos(\omega_c t + \Theta)\cos(\omega_c t + \omega_c \tau + \Theta)} \\
 &= \overline{m(t)m(t+\tau)} \cdot \overline{\cos(\omega_c t + \Theta)\cos(\omega_c t + \omega_c \tau + \Theta)} \\
 &= \frac{1}{2}R_m(\tau)\cos\omega_c\tau \\
 S_{\varphi}(\omega) &= \frac{1}{4}[S_m(\omega + \omega_c) + S_m(\omega - \omega_c)] \\
 \overline{\varphi^2(t)} &= R_{\varphi}(0) = \frac{1}{2}R_m(0) = \frac{1}{2}\overline{m^2(t)}
 \end{aligned}$$

Trem de Pulso Aleatório

Exemplo 11.6

Dados digitais são transmitidos usando-se um pulso base $p(t)$, assim como mostrado a seguir. Pulsos sucessivos estão separados por T_b segundos e o k -ésimo pulso é $a_k p(t)$, em que a_k é uma variável aleatória. A distância α do primeiro pulso ($k=0$) à origem é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, T_b)$. Obtenha a função de autocorrelação e a DEP do trem de pulso $y(t)$ dado por:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_b - \alpha)$$

Trem de Pulso Aleatório

Exemplo 11.6

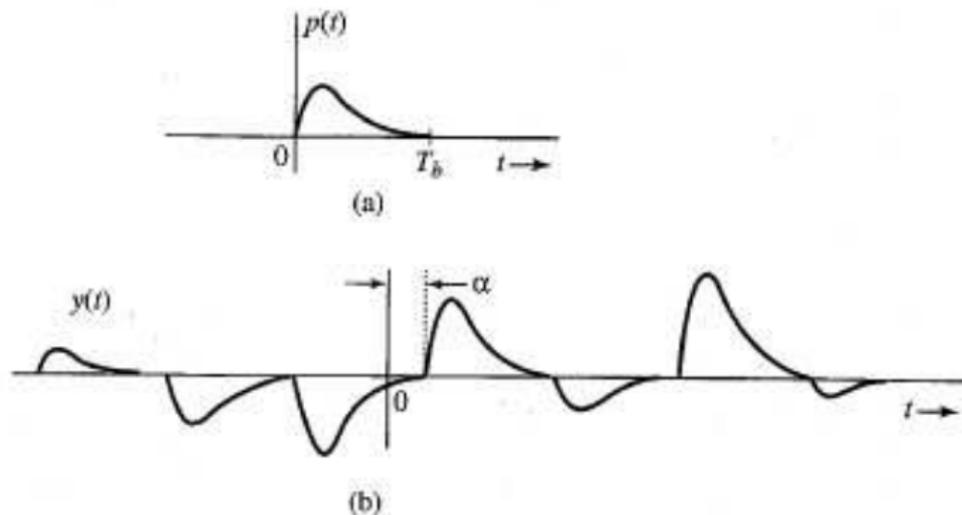


Figure 11.10 Random PAM process.

Trem de Pulso Aleatório

Exemplo 11.6 - Solução

$$\begin{aligned}
 R_y(\tau) &= \overline{y(t)y(t+\tau)} \\
 &= \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_b - \alpha) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m p(t + \tau - mT_b - \alpha)} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{a_k a_m p(t - kT_b - \alpha) p(t + \tau - mT_b - \alpha)} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{a_k a_m} \overline{p(t - kT_b - \alpha) p(t + \tau - mT_b - \alpha)}
 \end{aligned}$$

Trem de Pulso Aleatório

Exemplo 11.6 - Solução

Fazendo $m = k + n$

$$\begin{aligned}
 R_y(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_k a_{k+n} p(t - kT_b - \alpha) p(t + \tau - [k + n]T_b - \alpha)} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_b} p(t - kT_b - \alpha) p(t + \tau - [k + n]T_b - \alpha) p(\alpha) d\alpha \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(t - kT_b - \alpha) p(t + \tau - [k + n]T_b - \alpha) d\alpha \\
 &= \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{t-(k+1)T_b}^{t-kT_b} p(\beta) p(\beta + \tau - nT_b) d\beta \\
 &= \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \int_{-\infty}^{\infty} p(\beta) p(\beta + \tau - nT_b) d\beta
 \end{aligned}$$

Trem de Pulso Aleatório

Exemplo 11.6 - Solução

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_n \psi_p(\tau - nT_b)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n &= \overline{a_k a_{k+n}} \\ \psi_p(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) p(t + \tau) dt \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que se $p(t) \iff P(\omega)$, então

$$\psi_p(\tau) \iff |P(\omega)|^2$$

Trem de Pulso Aleatório

Exemplo 11.6 - Solução

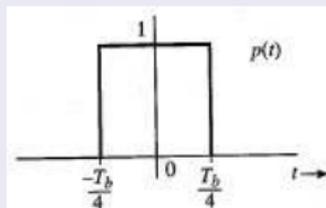
$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \mathcal{F}\{R_y(\tau)\} \\ &= \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_n |P(\omega)|^2 e^{-jn\omega T_b} \\ &= \frac{|P(\omega)|^2}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_n e^{-jn\omega T_b} \end{aligned}$$

Esta expressão é similar à obtida anteriormente no capítulo 7, exceto pela nova maneira de se calcular os coeficientes \mathbf{R}_n

Trem de Pulso Aleatório

Exemplo 11.7

Obtenha a DEP $S_y(\omega)$ para um sinal aleatório binário polar em que o 1 é transmitido pelo pulso $p(t)$ mostrado abaixo e o 0 é transmitido por $-p(t)$. Os bits 0 e 1 são igualmente prováveis e a taxa de transmissão é $R_b = 1/T_b$. Considere que cada bit transmitido é independente dos demais.



Trem de Pulso Aleatório

Exemplo 11.7 - Solução

Para obter a DEP é necessário calcular os coeficientes \mathbf{R}_n e substituir na expressão anterior

$$\overline{a_k} = \sum_k a_k P(a_k) = (1)P(a_k = 1) + (-1)P(a_k = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathbf{R}_0 = \overline{a_k^2} = \sum_k a_k^2 P(a_k) = (1)^2 P(a_k = 1) + (-1)^2 P(a_k = -1) = 1$$

$$\mathbf{R}_n = \overline{a_k a_{k+n}} = \overline{a_k} \cdot \overline{a_{k+n}} = 0 \quad n \geq 1$$

$$S_y(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{T_b} = \frac{T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_b}{4}\right)$$

Processos Aleatórios Múltiplos

- Seja $x(t)$ e $y(t)$ dois processos aleatórios, então a função de correlação cruzada é definida como:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)y(t_2)}$$

- $x(t)$ e $y(t)$ são conjuntamente estacionários se cada um deles é estacionário no sentido amplo e se:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_2 - t_1) = R_{xy}(\tau)$$

- $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados se:

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t + \tau)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Processos Aleatórios Múltiplos

- $x(t)$ e $y(t)$ são não-coerentes ou ortogonais se:

$$R_{xy}(\tau) = 0$$

- Processos ortogonais são processos descorrelacionados com $\bar{x} = 0$ e/ou $\bar{y} = 0$
- $x(t)$ e $y(t)$ são independentes se as variáveis aleatórias $x(t_1)$ e $y(t_2)$ são independentes
 - Processos independentes são descorrelacionados

Processos Aleatórios Múltiplos

- A DEP cruzada $S_{xy}(\omega)$ é definida como

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{X_T^*(\omega) Y_T(\omega)}}{T}$$

- Usando-se argumentos similares aos empregados anteriormente, mostra-se que:

$$R_{xy}(\tau) \iff S_{xy}(\omega)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \text{ (Processos Reais)}$$

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega) \text{ (Processos Reais)}$$

Processos Aleatórios Múltiplos

- Se $x(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo e $y(t)$ é a saída de um sistema linear cuja entrada é $x(t)$, então:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t - \alpha)d\alpha$$

- Logo,

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \overline{y(t)y(t + \tau)} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t - \alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)x(t + \tau - \beta)d\beta} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)x(t - \alpha)x(t + \tau - \beta)d\alpha d\beta} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)\overline{x(t - \alpha)x(t + \tau - \beta)}d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_x(\tau + \alpha - \beta)d\alpha d\beta \end{aligned}$$

Processos Aleatórios Múltiplos

- Então

$$R_y(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_x(\tau)$$

- Logo, a DEP de $y(t)$ é dada por:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

- De modo análogo, as seguintes relações também podem ser obtidas:

$$S_{xy}(\omega) = S_x(\omega)H(\omega)$$

$$S_{yx}(\omega) = S_x(\omega)H^*(\omega)$$

Soma de Processos Aleatórios

- Se dois processos aleatórios $x(t)$ e $y(t)$ são adicionados, resultando em $z(t) = x(t) + y(t)$, então:

$$R_z(\tau) = \overline{z(t)z(t+\tau)} = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$$

- Se $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados, então:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2\bar{x}\bar{y}$$

- Se $x(t)$ e $y(t)$ são ortogonais, então:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$$

$$S_z(\omega) = S_x(\omega) + S_y(\omega)$$

$$\overline{z^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2}$$

Ruído Térmico

Exemplo 11.9

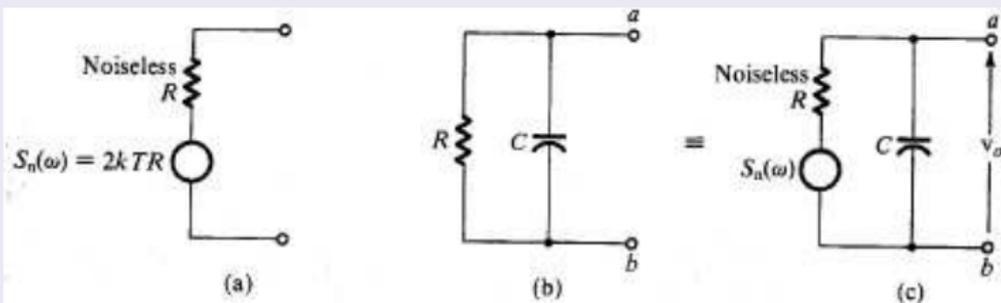
O movimento aleatório dos elétrons em um resistor R origina uma tensão entre os seus terminais. Esta tensão $n(t)$ é conhecida como ruído térmico. A sua DEP $S_n(\omega)$ é praticamente plana sobre uma extensa banda (até 1000 GHz na temperatura ambiente) e é dada por:

$$S_n(\omega) = 2kTR \quad (k = 1,38 \times 10^{-23})$$

Um resistor R na temperatura T pode ser representado por um resistor sem ruído R em série com uma fonte de ruído branco com DEP $S_n(\omega)$. Calcule o valor RMS da tensão ao longo do circuito RC mostrado a seguir.

Ruído Térmico

Exemplo 11.9



Ruído Térmico

Exemplo 11.9 - Solução

A função de transferência relacionando a saída v_o com a entrada $S_n(\omega)$ é dada por:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Sendo $S_o(\omega)$, a DEP da saída v_o , então:

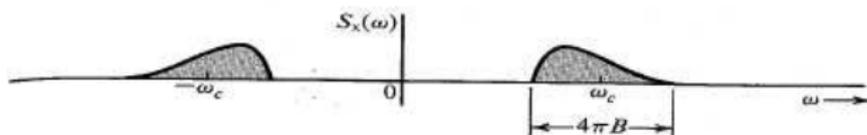
$$S_o(\omega) = \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right|^2 2kTR = \frac{2kTR}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\overline{v_o^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2kTR}{1 + \omega^2 R^2 C^2} d\omega = \frac{kT}{C}$$

$$v_o(RMS) = \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

Processos Aleatórios Passa-Faixa

- Em um processo passa-faixa, a DEP está confinada em uma certa banda passante



- Um sinal passa-faixa determinístico $g_{PF}(t)$ pode ser representado em suas componentes de fase e quadratura, ou seja:

$$\begin{aligned} g_{PF}(t) &= g_c(t) \cos \omega_c t + g_s(t) \sin \omega_c t \\ &= E(t) \cos [\omega_c t + \psi(t)] \end{aligned}$$

- Nessa expressão, $g_c(t)$ e $g_s(t)$ são sinais passa-baixas

Processos Aleatórios Passa-Faixa

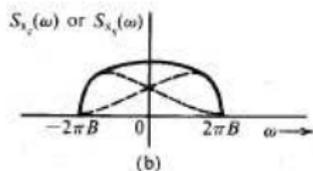
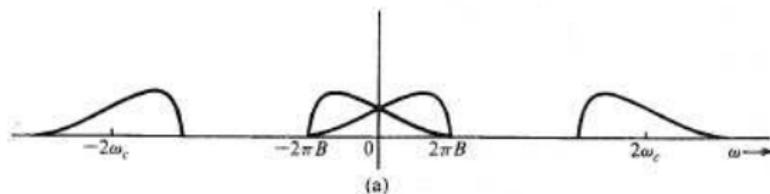
- Analogamente, um processo aleatório passa-faixa $x(t)$ também pode ser representado na forma:

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_c t + x_s(t) \sin \omega_c t$$

- Nessa expressão, $x_c(t)$ e $x_s(t)$ são processos aleatórios passa-baixas com DEP dada por:

$$S_{x_s}(\omega) = S_{x_c}(\omega) = \begin{cases} S_x(\omega + \omega_c) + S_x(\omega - \omega_c), & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0, & |\omega| > 2\pi B \end{cases}$$

Processos Aleatórios Passa-Faixa



- Pode-se observar que as áreas das DEPs $S_X(\omega)$, $S_{X_c}(\omega)$ e $S_{X_s}(\omega)$ são iguais, assim:

$$\overline{x_c^2(t)} = \overline{x_s^2(t)} = \overline{x^2(t)}$$

Processos Aleatórios Passa-Faixa

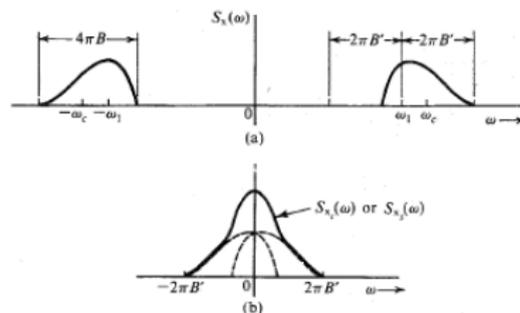
- Pode-se mostrar que:

$$\overline{x_c(t)x_s(t)} = R_{X_c X_s}(0) = 0$$

- Se $S_x(\omega)$ é simétrica em torno de ω_c e $-\omega_c$ então:

$$R_{X_c X_s}(\tau) = 0$$

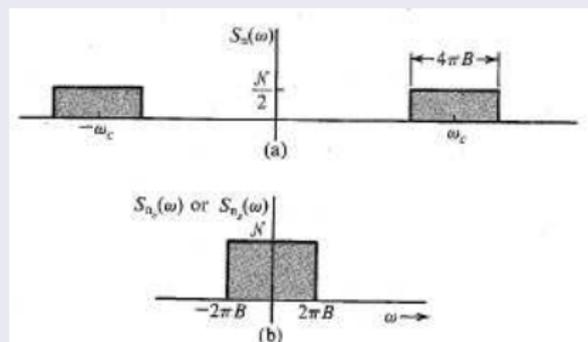
- A representação em fase e quadratura não é única, pois diferentes frequências centrais geram representações diferentes



Ruído Branco Passa-Faixa

Exemplo 11.11

A DEP do ruído branco passa-faixa $n(t)$ é mostrada na figura abaixo. Represente este processo em termos das suas componentes de fase e quadratura. Obtenha as expressões de $S_{n_c}(\omega)$ e $S_{n_s}(\omega)$ e verifique que $\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)}$



Ruído Branco Passa-Faixa

Exemplo 11.11 - Solução

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t$$

Em que:

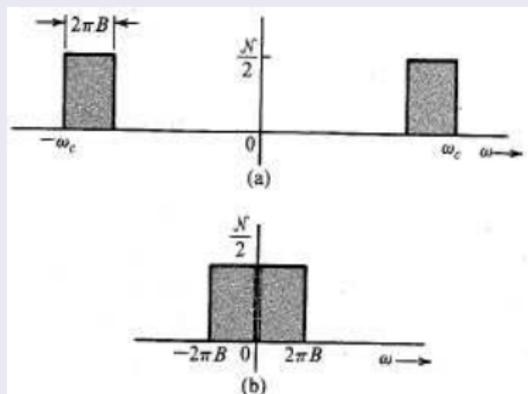
$$S_{n_s}(\omega) = S_{n_c}(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{N}, & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0, & |\omega| > 2\pi B \end{array} \right\}$$

$$\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = 2\mathcal{N}B$$

Ruído Branco Passa-Faixa

Exemplo 11.12

A DEP do ruído branco passa-faixa $n(t)$ de um canal SSB (usando a Banda Lateral Inferior) é mostrada na figura abaixo. Represente este processo em termos das suas componentes de fase e quadratura com frequência central ω_c .



Ruído Branco Passa-Faixa

Exemplo 11.12 - Solução

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t$$

Em que:

$$S_{n_s}(\omega) = S_{n_c}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{N}{2}, \quad |\omega| \leq 2\pi B \\ 0, \quad |\omega| > 2\pi B \end{array} \right\}$$

$$\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = \mathcal{N}B$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- Os processos gaussianos são de extrema importância nas telecomunicações
- Em um processo gaussiano, as variáveis aleatórias $x(t_i) = x_i$ são gaussianas
- Um processo aleatório passa-faixa gaussiano branco pode ser expressado como

$$\begin{aligned}n(t) &= n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t \\S_{n_s}(\omega) &= S_{n_c}(\omega) = \begin{cases} \mathcal{N}, & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0, & |\omega| > 2\pi B \end{cases} \\ \overline{n_c^2(t)} &= \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = 2\mathcal{N}B\end{aligned}$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- Um processo aleatório passa-faixa gaussiano branco também pode ser expressado na forma polar como

$$\begin{aligned}n(t) &= E(t) \cos(\omega_c t + \Theta) \\E(t) &= \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \\ \Theta(t) &= -\arctan \frac{n_s(t)}{n_c(t)}\end{aligned}$$

- As variáveis aleatórias $n_c(t)$ e $n_s(t)$ são variáveis gaussianas descorrelacionadas, com média nula e variância $\sigma^2 = 2\mathcal{N}B$

$$p_{n_c}(\alpha) = p_{n_s}(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- Na forma polar, a variável aleatória $E(t)$ tem uma fdp de Rayleigh e Θ é uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$

$$p_E(E) = \frac{E}{\sigma^2} e^{-\frac{E^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = 2\mathcal{N}B$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- Outro caso de interesse é o processo aleatório resultante da soma de uma senóide com o ruído passa-faixa gaussiano branco

$$y(t) = A \cos(\omega_c t + \varphi) + n(t)$$

- Como $n(t)$ pode ser representado em fase e quadratura, tem-se:

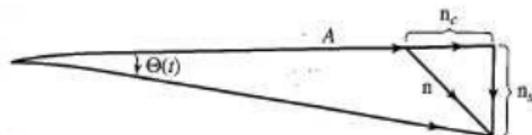
$$\begin{aligned} y(t) &= [A + n_c(t)] \cos(\omega_c t + \varphi) + n_s(t) \sin(\omega_c t + \varphi) \\ &= E(t) \cos(\omega_c t + \Theta(t) + \varphi) \end{aligned}$$

$$E(t) = \sqrt{[A + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)}, \Theta(t) = -\arctan \frac{n_s(t)}{A + n_c(t)}$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- A partir da representação fasorial mostrada a seguir, pode-se verificar que:

$$n_c^2 + n_s^2 = E^2 - 2AE \cos \Theta(t) + A^2$$



- Substituindo na fdp de Rayleigh para $E(t)$, tem-se:

$$p_{E\Theta}(E, \theta) = \frac{E}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(E^2 - 2AE \cos \Theta(t) + A^2)}{2\sigma^2}}$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- As fdps marginais são obtidas integrando-se $p_{E\Theta}(E, \theta)$ com relação a E e a Θ , resultando em:

$$p_E(E) = \frac{E}{\sigma^2} e^{-\frac{(E^2+A^2)}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{AE}{\sigma^2}\right) \quad (\text{fdp de Rice})$$

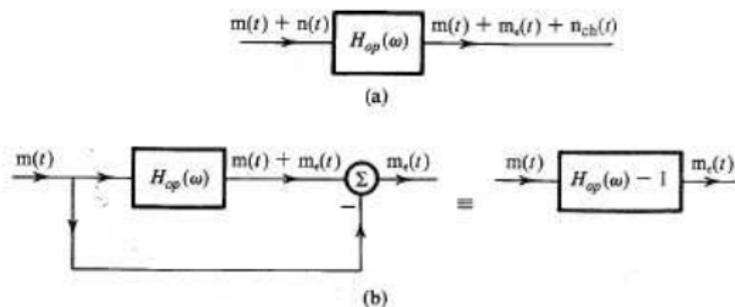
$$\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(E-A)^2}{2\sigma^2}} \quad (A \gg \sigma)$$

$$p_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} \left\{ 1 + \frac{A}{\sigma} \sqrt{2\pi} \cos \theta e^{\frac{A^2 \cos^2 \theta}{2\sigma^2}} \left[1 - Q\left(\frac{A \cos \theta}{\sigma}\right) \right] \right\}$$

- I_0 representa a função de Bessel modificada de ordem zero, que é em geral encontrada em tabelas

Filtragem Ótima

- Para melhorar a SNR quando o ruído está misturado com o sinal, pode-se atenuar ou suprimir as frequências em que o ruído é forte
 - Esse processo também causa distorção no sinal
 - A distorção induzida pode ser encarada como uma nova componente de ruído adicionada
 - Em geral, os efeitos da supressão do ruído compensam o efeito da distorção induzida



Filtragem Ótima

- Denotando por $H_{op}(\omega)$ a função de transferência do filtro ótimo, a potência do sinal de distorção $m_\epsilon(t)$ é dada por:

$$N_D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega) |H_{op}(\omega) - 1|^2 d\omega$$

- De modo similar, a potência do ruído do canal na saída do filtro é dada por:

$$N_{ch} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |H_{op}(\omega)|^2 d\omega$$

- Aqui, $S_m(\omega)$ é a DEP do sinal na entrada do filtro e $S_n(\omega)$ é a DEP do ruído na entrada do filtro

Filtragem Ótima

- Como o sinal e o ruído são ortogonais, pode-se admitir que o ruído total é dado por:

$$\begin{aligned} N_o &= N_{ch} + N_D \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left| H_{op}(\omega) - \frac{S_m(\omega)}{S_r(\omega)} \right|^2 S_r(\omega) + \frac{S_m(\omega)S_n(\omega)}{S_r(\omega)} \right] d\omega \end{aligned}$$

- Em que $S_r(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega)$
- O filtro ótimo que minimiza N_o é dado por:

$$H_{op}(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_r(\omega)} = \frac{S_m(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)}$$

Filtragem Ótima

- O filtro ótimo assim obtido é conhecido como filtro de Wiener-Hopf
- Quando $S_m(\omega) \gg S_n(\omega)$, $H_{op}(\omega) \approx 1$
- Quando $S_m(\omega) \ll S_n(\omega)$, $H_{op}(\omega)$ tem forte atenuação
- Para o filtro ótimo, a potência total do ruído é dada por:

$$N_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_m(\omega)S_n(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega)} d\omega$$

- Se a SNR na entrada do filtro é alta (acima de 20dB), $H_{op}(\omega)$ é praticamente ideal e N_o é dado por:

$$N_o \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega$$

Filtragem Ótima

Exemplo 11.13

Um processo aleatório $m(t)$ é misturado com um ruído branco $n(t)$ no canal. Dado que

$$S_m(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad S_n(\omega) = \frac{\mathcal{N}}{2}$$

obtenha o filtro de Wiener-Hopf a fim de maximizar a SNR. Obtenha também a potência do ruído na saída N_o .

Filtragem Ótima

Exemplo 11.13 - Solução

$$\begin{aligned}H_{op}(\omega) &= \frac{4\alpha}{4\alpha + \mathcal{N}(\alpha^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{4\alpha}{\mathcal{N}(\beta^2 + \omega^2)}, \quad \beta^2 = \frac{4\alpha}{\mathcal{N}} + \alpha^2\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}h_{op}(t) &= \frac{2\alpha}{\mathcal{N}B} e^{-\beta|t|} \\ N_o &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\mathcal{N}(\beta^2 + \omega^2)} d\omega = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (4\alpha/\mathcal{N})}}\end{aligned}$$

Filtragem Ótima

Exemplo 11.13 - Solução

