Fundamentos da Teoria da Probabilidade

Edmar José do Nascimento
(Princípios de Comunicações)
http://www.univasf.edu.br/˜edmar.nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Sinais Aleatórios

- Do ponto de vista do receptor, os sinais de interesse prático aparentam ser aleatórios
- Uma variável aleatória $X(A)$ ou simplesmente X representa uma relação funcional entre um evento aleatório A e um número real
- A função de distribuição de X é definida como

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Sendo $P(X \leq x)$ a probabilidade de X ser menor que o número real x

Função de Distribuição

- A função de distribuição $F_X(x)$ tem as seguintes propriedades

$$
\begin{aligned}
0 &\leq F_X(x) \leq 1 \\
F_X(x_1) &\leq F_X(x_2) \text{ se } x_1 \leq x_2 \\
F_X(-\infty) &= 0 \\
F_X(+\infty) &= 1
\end{aligned}
$$

- Uma outra função de grande importância é a função densidade de probabilidade (fdp) da variável x, denotada por

$$
p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}
$$

Função Densidade de Probabilidade

- A partir da fdp é possível calcular a probabilidade de eventos como $x_1 \leq X \leq x_2$

$$
\begin{aligned}
P(x_1 \leq X \leq x_2) &= P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) \\
&= F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)dx
\end{aligned}
$$

- A fdp tem as seguintes propriedades

$$
\begin{aligned}
p_X(x) &\geq 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx &= F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1
\end{aligned}
$$

Médias de Variáveis Aleatórias

- O valor esperado ou valor médio de uma variável aleatória X é definido como

$$m_X = \mathbf{E}\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

- O n-ésimo momento de uma variável aleatória X é definido como

$$\mathbf{E}\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx$$

- Quando $n = 2$, o momento de segunda ordem é conhecido como valor médio quadrático de X, ou seja

$$\mathbf{E}\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx$$

Médias de Variáveis Aleatórias

- Pode-se também definir os momentos centrais de uma variável aleatória X, bastando substituir nas expressões anteriores x por $x - m_X$
- O momento central mais importante é a variância, definida por

$$var(X) = \sigma_X^2 = \mathbf{E}\{(X - m_X)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx$$

- A relação entre a variância e o valor médio quadrático é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \mathbf{E}\{(X - m_X)^2\} = \mathbf{E}\{X^2 - 2m_X X + m_X^2\} \\ &= \mathbf{E}\{X^2\} - 2m_X \mathbf{E}\{X\} + m_X^2 = \mathbf{E}\{X^2\} - m_X^2 \end{aligned}$$

Função de Distribuição Conjunta

- Pode-se definir a função de distribuição e a função densidade de probabilidade para mais de uma variável aleatória
- Consideram-se n variáveis aleatórias denotadas por $X_i, i = 1, \cdots, n$
- A função de distribuição conjunta é definida como

$$
\begin{aligned}
F(x_1, \cdots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n) \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, \cdots, u_n) du_1 \cdots du_n
\end{aligned}
$$

- Sendo a fdp conjunta dada por

$$
p(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} F(x_1, \cdots, x_n)
$$

Função de Distribuição Conjunta

- A partir da fdp conjunta pode-se obter a distribuição de uma variável aleatória X_i integrando-se a fdp conjunta em relação às demais

$$p(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_2, \cdots, x_n) dx_2 \cdots dx_n$$

Probabilidade Condicional

- Considerando-se um experimento conjunto que ocorre com probabilidade $P(A, B)$
- Admitindo-se que o evento B ocorreu, a probabilidade condicional do evento A dado B é dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

- De modo similar, a probabilidade do evento B dado A é dada por

$$P(B|A) = \frac{P(A, B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

Probabilidade Condicional

- Verifica-se que:

$$
\begin{aligned}
P(A,B) &= P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \\
A \cap B = \varnothing &\implies P(A|B) = 0 \\
A \subset B &\implies A \cap B = A \implies P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \\
B \subset A &\implies A \cap B = B \implies P(A|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1
\end{aligned}
$$

Regra de Bayes

- Seja $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ um conjunto de eventos mutuamente exclusivos com $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ e B um evento arbitrário
- A regra de Bayes é definida como

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i, B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

- Em telecomunicações tem-se:
  - A_i - Mensagem transmitida
  - $P(A_i)$ - Probabilidade a priori de A_i
  - B - Mensagem recebida
  - $P(A_i|B)$ Probabilidade a posteriori de A_i dado que B foi recebido

Independência Estatística

- Considerando-se dois eventos A e B, se A não depende de B então:

$$P(A|B) = P(A) \Longrightarrow P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$$

- Resultados similares podem ser obtidos para variáveis aleatórias em termos da função de distribuição e da função densidade de probabilidade

$$\begin{aligned} p(x_1|x_2) &= \frac{p(x_1,x_2)}{p(x_2)} \\ p(x_1,\cdots,x_n) &= p(x_1,\cdots,x_k|x_{k+1},\cdots,x_n)p(x_{k+1},\cdots,x_n) \end{aligned}$$

Independência Estatística

- Assim, se n variáveis aleatórias são independentes então:

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n) \\
p(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)
\end{aligned}$$

Variável Aleatória Gaussiana

- Uma variável aleatória gaussiana possui densidade de probabilidade dada por

$$p_X(x) \quad = \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$$

- Os parâmetros desta distribuição são m (média) e σ^2 (variância)
- A função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) \quad = \quad P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx$$

Variável Aleatória Gaussiana

- Os valores de $F_X(x)$ podem ser obtidos em tabelas através do seguinte procedimento
- Fazendo-se $z = (x - m)/\sigma$, tem-se

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} e^{-z^2/2} dz$$

- Definindo-se a função $Q(.)$ como

$$Q(y) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

- Tem-se que

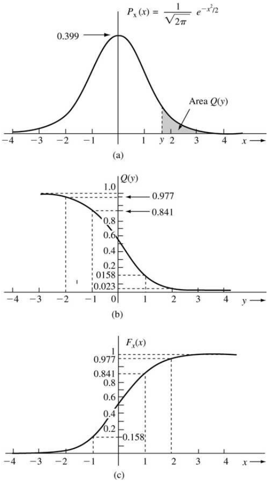
$$F_X(x) = 1 - Q\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

Variável Aleatória Gaussiana

- Assim, para uma variável aleatória gaussiana com média m e variância σ^2, tem-se que

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= 1 - Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \\ P(X > x) &= Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Variável Aleatória Gaussiana

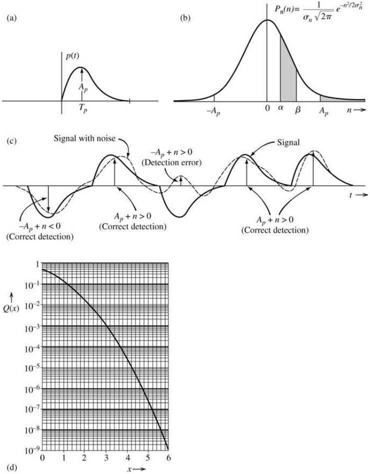


Variável Aleatória Gaussiana

Exemplo 8.16

Considere um canal binário em que os bits 0 e 1 são transmitidos com sinalização polar. A amplitude de pico do pulso positivo é A_p e o ruído adicionado ao canal pode ser descrito por uma variável aleatória gaussiana n com média nula e variância σ_n. Considere que a tomada de decisão é realizada no instante da amplitude máxima do pulso. Calcule a probabilidade de erro para este canal.

Exemplo 8.16



(a)
p(t)
A_p
T_p
(b)
$P_n(n) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} e^{-n^2/2\sigma_n^2}$
$-A_p$
0
α
β
A_p
$n \rightarrow$
(c)
Signal with noise
$-A_p + n > 0$
(Detection error)
Signal
$t \rightarrow$
$-A_p + n < 0$
(Correct detection)
$A_p + n > 0$
(Correct detection)
$A_p + n > 0$
(Correct detection)
$Q(x)$
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
0 1 2 3 4 5 6
$x \rightarrow$
(d)

Exemplo 8.16

- Como n é gaussiana com média nula e variância σ_n^2, a sua fdp é dada por:

$$p(n) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}$$

- Sendo A_p a amplitude do pulso positivo (1) e $-A_p$ a amplitude do pulso negativo (0) no instante de amostragem
  - Um erro ocorre se ao transmitir o bit 0, a amostra obtida $-A_p + n > 0$, ou seja, $n > A_p$
  - Um erro ocorre se ao transmitir o bit 1, a amostra obtida $A_p + n < 0$, ou seja, $n < -A_p$

Exemplo 8.16

- Sendo ϵ o evento erro de detecção, então:

$$\begin{aligned} P(\epsilon|0) &= P(n > A_p) \\ P(\epsilon|1) &= P(n < -A_p) \end{aligned}$$

- Assim, se n possui distribuição gaussiana, tem-se:

$$\begin{aligned} P(\epsilon|0) &= \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}\int_{A_p}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_p/\sigma_n}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 8.16

- Analogamente, $P(\epsilon|1)$ é calculado como:

$$\begin{aligned} P(\epsilon|1) &= \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-A_p} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-A_p/\sigma_n} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_p/\sigma_n}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

- Logo, a probabilidade de erro $P(\epsilon)$ é dada por:

$$\begin{aligned} P(\epsilon) &= \sum_i P(\epsilon, m_i) = \sum_i P(m_i)P(\epsilon|m_i) \\ &= \sum_i P(m_i)Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

Variável Aleatória Gaussiana

- Variáveis aleatórias gaussianas possuem propriedades que justificam a sua importância nas comunicações
  - A soma de variáveis gaussianas independentes é gaussiana
  - A saída de um filtro linear cuja entrada é gaussiana é uma variável aleatória gaussiana
  - Pelo teorema do limite central, a soma de um número infinito de variáveis aleatórias independentes resulta em uma variável aleatória gaussiana