

# Amostragem e Conversão A/D

Edmar José do Nascimento  
(Princípios de Comunicações)

<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco

# Roteiro

1 Amostragem

2 Quantização

# Introdução

- O processo de digitalização de um sinal analógico consiste em duas etapas básicas: amostragem e quantização
- No processo de amostragem, obtém-se amostras do sinal em instantes de tempo discretos
- Na etapa de quantização, as amostras em tempo discretos obtidas são mapeadas para um alfabeto finito
- O sinal digital consiste então de uma sequência de símbolos discretos (números)
- Esses números podem ainda ser representados em outros sistemas de numeração como o binário

# Teorema da Amostragem

- O teorema da amostragem estabelece condições para que um sinal analógico possa ser recuperado a partir de suas amostras
- Um sinal  $g(t)$  cujo espectro é limitado em banda a  $B$  Hz (ou seja,  $G(\omega) = 0$  para  $|\omega| > 2\pi B$ ) pode ser reconstruído a partir de suas amostras se ele for amostrado a uma frequência  $f_s$  superior a  $2B$  Hz
  - $f_s > 2B$  ou  $T_s = 1/f_s < 1/(2B)s$
- A prova desse teorema pode ser feita reconstruindo-se  $g(t)$  a partir de suas amostras usando um trem de impulsos  $\delta_{T_s}(t)$  com período  $T_s$

## Teorema da Amostragem

- O sinal amostrado  $\bar{g}(t)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\bar{g}(t) &= g(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t - nT_s)\end{aligned}$$

- Como  $\delta_{T_s}(t)$  é periódico, a sua expansão em séries de Fourier resulta em

$$\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s}[1 + 2 \cos \omega_s t + 2 \cos 2\omega_s t + \dots]$$

- Assim o sinal amostrado  $\bar{g}(t)$  pode ser reescrito como

$$\bar{g}(t) = \frac{1}{T_s}[g(t) + 2g(t) \cos \omega_s t + 2g(t) \cos 2\omega_s t + \dots]$$

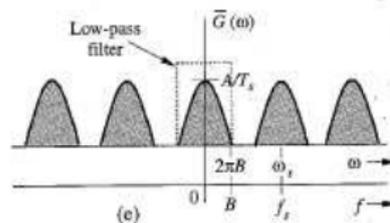
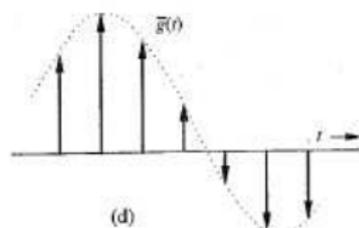
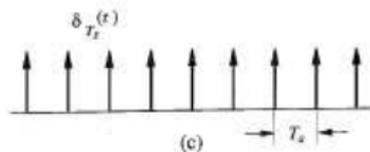
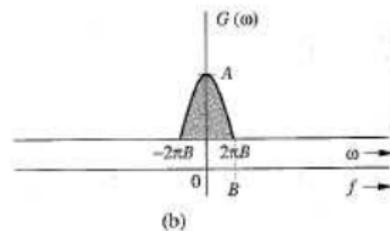
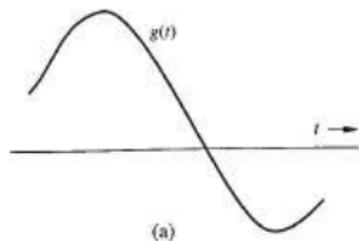
## Teorema da Amostragem

- O espectro de  $\bar{g}(t)$  denotado por  $\bar{G}(\omega)$  é dado então por

$$\begin{aligned}\bar{G}(\omega) &= \frac{1}{T_s} [G(\omega) + G(\omega - \omega_s) + G(\omega + \omega_s) + \\ &\quad G(\omega - 2\omega_s) + G(\omega + 2\omega_s) + \dots] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_s)\end{aligned}$$

- Para que se possa reconstruir  $g(t)$  a partir de  $\bar{g}(t)$  é necessário que as réplicas de  $G(\omega)$  não se sobreponham, ou seja, que  $\omega_s > 2(2\pi B)$  ou  $f_s > 2B$
- A taxa mínima de amostragem  $f_s = 2B$  é denominada de *taxa de Nyquist* e o período máximo  $T_s = 1/(2B)$  de *intervalo de Nyquist*

# Sinal Amostrado e o seu Espectro



## Reconstrução Exata

- Conforme observado na prova do teorema, a reconstrução do sinal analógico pode ser feita gerando-se um trem de impulsos com amplitudes iguais as das amostras e passando-se o sinal através de um filtro passa-baixas com banda  $B$  Hz
- No domínio do tempo, esta operação pode ser obtida considerando-se um filtro

$$h(t) = 2BT_s \text{sinc}(2\pi Bt) \iff H(\omega) = T_s \text{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right)$$

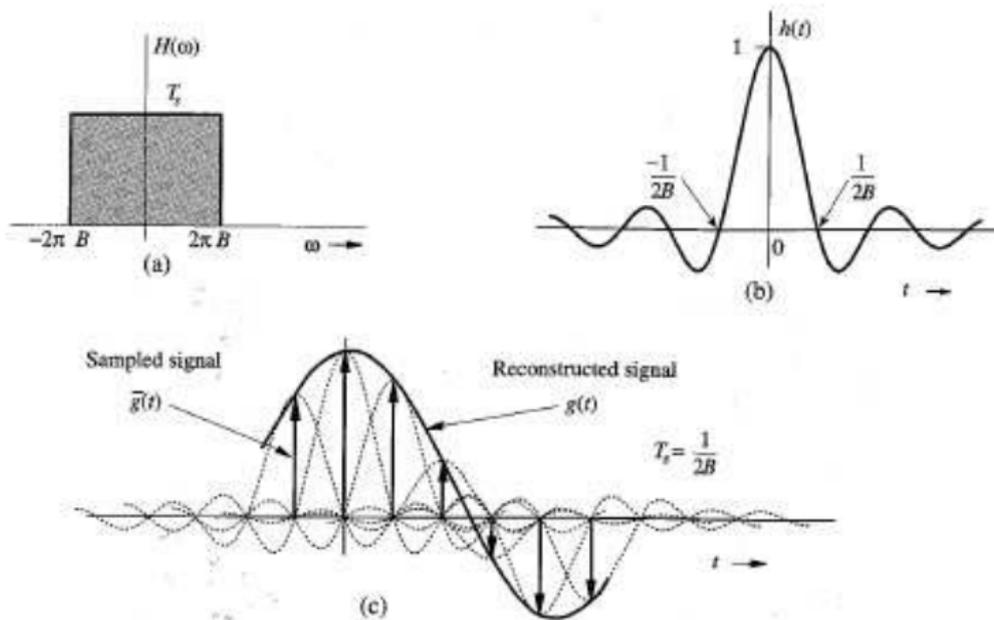
# Reconstrução Exata

- Se  $T_s = 1/(2B)$ , então a reconstrução exata do sinal é dada pela *fórmula de interpolação*

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_k g(kT_s)\delta(t - kT_s) * h(t) = \sum_k g(kT_s)h(t - kT_s) \\ &= \sum_k g(kT_s)\text{sinc}[2\pi B(t - kT_s)] \\ &= \sum_k g(kT_s)\text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)\end{aligned}$$

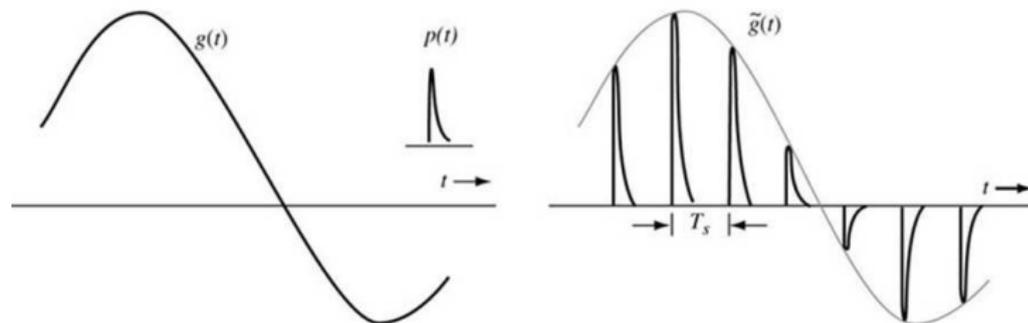
- Cabe lembrar que um sistema com esse  $h(t)$  não é fisicamente realizável

# Reconstrução Exata



# Reconstrução Prática de Sinais

- Como será mostrado adiante, pulsos periódicos genéricos podem ser usados para reconstruir um sinal a partir de suas amostras
- Nesse tipo de reconstrução, a característica não ideal do pulso é compensada por um filtro equalizador



## Reconstrução Prática de Sinais

- O sinal reconstruído a partir de pulsos  $p(t)$  é representado por

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &\triangleq \sum_n g(nT_S)p(t - nT_S) \\ &= p(t) * \left[ \sum_n g(nT_S)\delta(t - nT_S) \right] = p(t) * \bar{g}(t)\end{aligned}$$

- No domínio da frequência, tem-se que

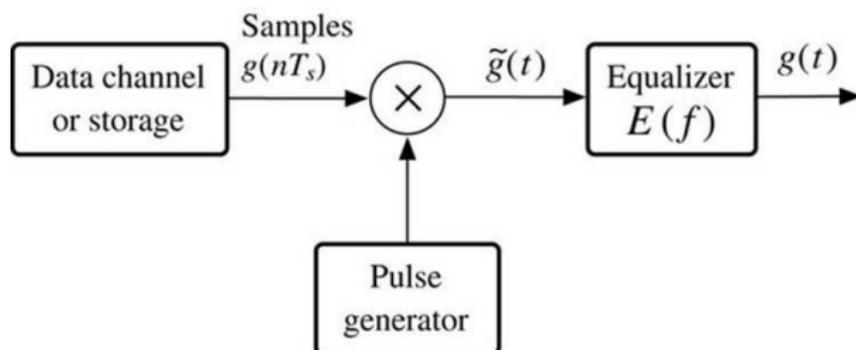
$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) \iff \tilde{G}(f) &= P(f) \frac{1}{T_S} \sum_n G(f - nf_S) \\ &= P(f) \left[ G(f) \frac{1}{T_S} + \frac{1}{T_S} \sum_{n, n \neq 0} G(f - nf_S) \right]\end{aligned}$$

## Reconstrução Prática de Sinais

- Para que  $g(t)$  seja recuperado, é necessário equalizar o sinal com um filtro  $E(f)$ , de modo que:

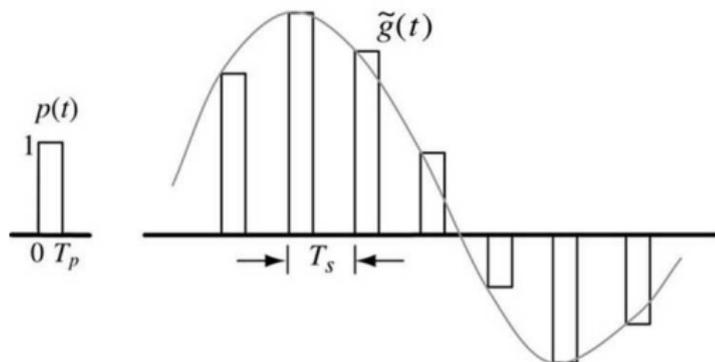
$$G(f) = E(f)\tilde{G}(f)$$

$$E(f)P(f) = \begin{cases} 0 & |f| > f_s - B \\ T_s & |f| < B \end{cases}$$



## Reconstrução Prática de Sinais

- Quando os pulsos  $p(t)$  são pulsos retangulares, tem-se um sistema de retenção de ordem zero (*zero-order hold*)
- Nesse caso, o sinal reconstruído a partir de suas amostras tem o formato indicado abaixo

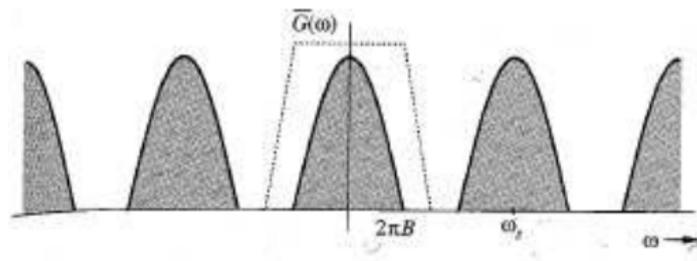
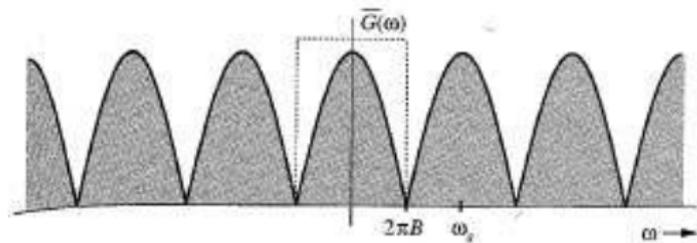


- Aproximações melhores podem ser obtidas através de um filtro de retenção de primeira ordem

## Dificuldades na Reconstrução

- Quando se utiliza a frequência de Nyquist na amostragem, se requer um filtro passa-baixas ideal (irrealizável) na reconstrução
- Quando há uma separação maior entre as bandas ( $f_s > 2B$ ), é mais fácil projetar filtros para recuperar o sinal  $g(t)$
- Sendo assim, há um compromisso entre o projeto do filtro e a escolha da frequência de amostragem

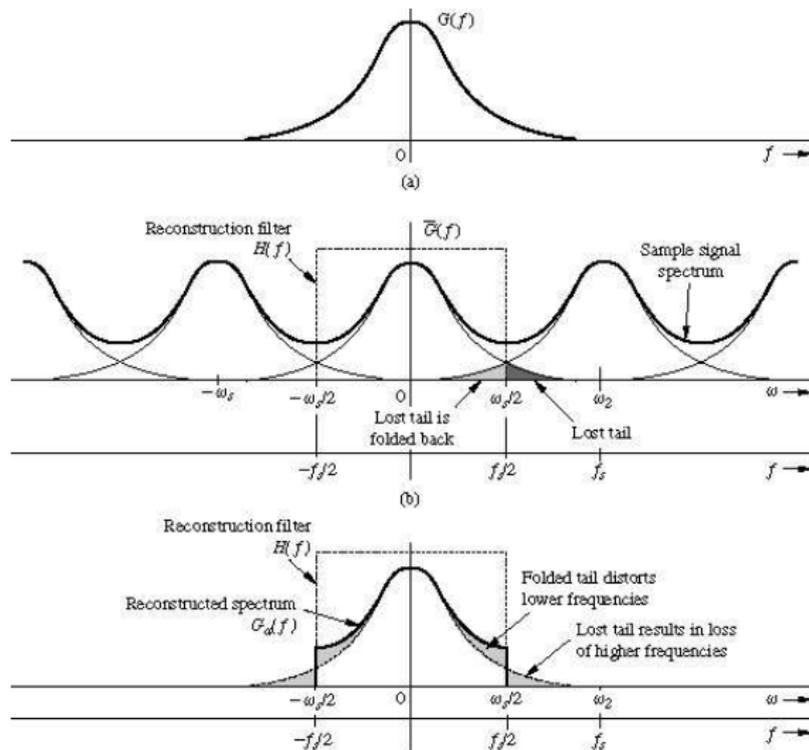
# Dificuldades na Reconstrução



## Dificuldades na Reconstrução

- Outro problema que surge é que os sinais práticos não são limitados em banda
- Isso significa que as componentes do sinal acima de  $\omega_s/2$  são perdidas e também interferem ao mesmo tempo no sinal recuperado
- Esse fenômeno é conhecido como mascaramento (*aliasing*), também conhecido como dobra espectral (*spectral folding*)

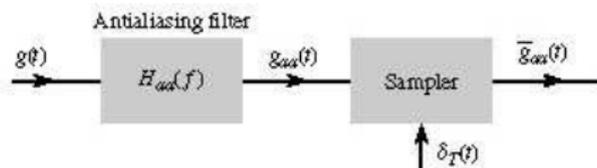
# Mascaramento



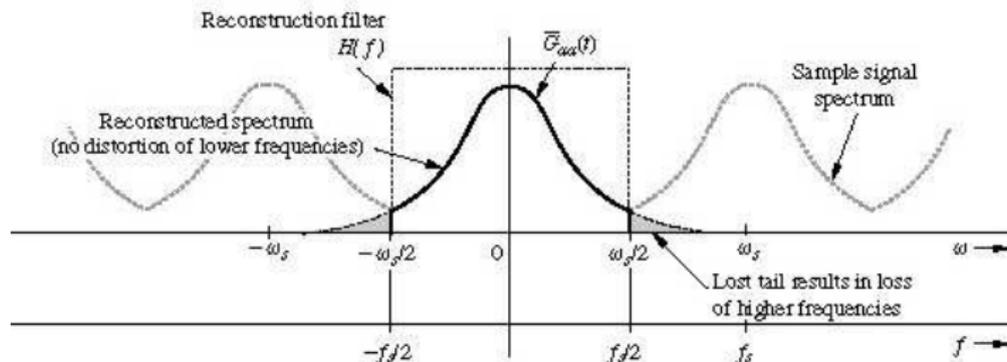
# Mascaramento

- Várias técnicas podem ser usadas para lidar com esse problema
  - Aumentar a frequência de amostragem
  - Eliminar uma porção do espectro antes da amostragem (filtro antialiasing) (pré-filtragem)
  - Eliminar a porção comprometida do espectro do sinal amostrado (filtro antialiasing) (pós-filtragem)

# Mascaramento



(d)



(e)

## Amostragem Prática

- Anteriormente, foi admitido que os valores das amostras  $g(kT_S)$  nos instantes  $kT_S$  eram perfeitamente conhecidos
- A partir dessas amostras se poderia reconstruir o sinal analógico utilizando pulsos periódicos e filtros equalizadores
- Entretanto, conhecer o valor real de uma amostra no instante  $kT_S$  é como conhecer precisamente o valor da velocidade instantânea de um móvel
- Na prática, o valor da amostra é inferido a partir de um intervalo de duração não nula  $T_p$

## Amostragem Prática

- O valor da amostra pode ser a simples média dos valores no intervalo ou a média com algum tipo de ponderação

$$g_1(kT_S) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} g(kT_S + t) dt$$

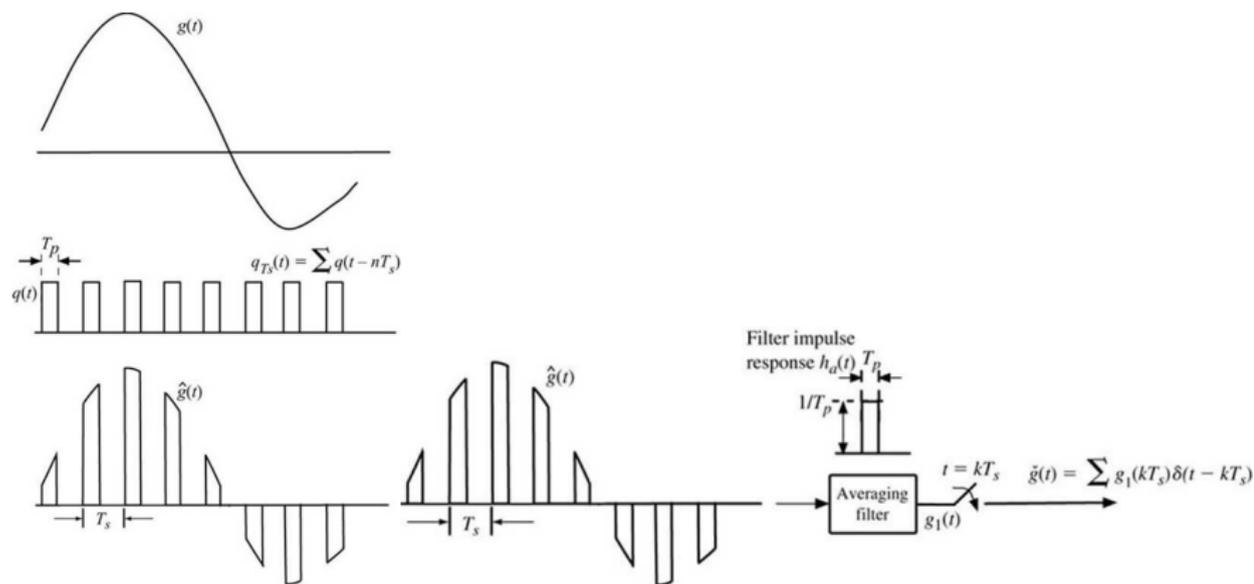
- Em termos gerais, o valor da amostra no instante  $kT_S$  pode ser representado por

$$g_1(kT_S) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} q(t)g(kT_S + t) dt$$

- Assim, o amostrador prático gera sinais da forma

$$\check{g}(t) = \sum g_1(kT_S)\delta(t - kT_S)$$

# Amostragem Prática



## Amostragem Prática

- Assim como na reconstrução do sinal por pulsos, a natureza da distorção introduzida pela amostragem prática é conhecida e pode ser eliminada com o uso de filtros equalizadores
- Quando se utiliza ponderação uniforme, pode-se mostrar que um sinal de banda  $B$  é distorcido pelo termo  $F_0(f)$  dado por

$$F_0(f) = \frac{1}{T_S} \sum_n Q_n \text{sinc}[\pi(f + nf_S)T_p]$$

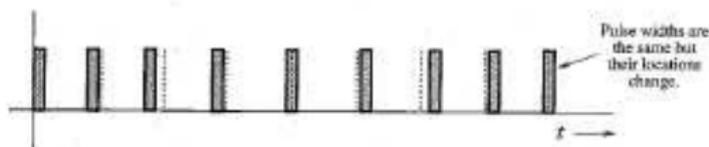
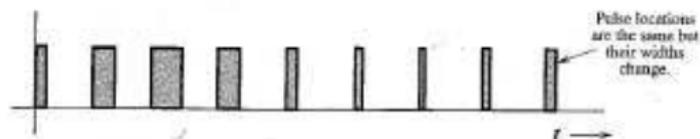
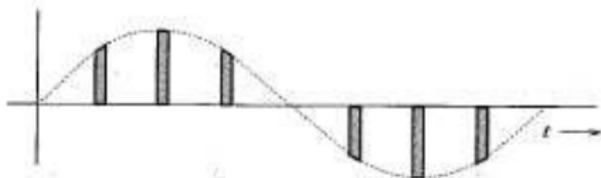
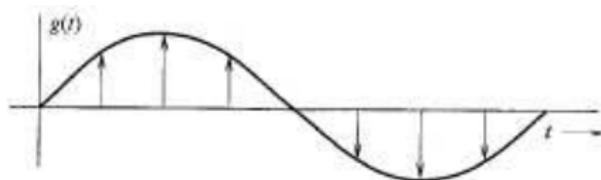
- Na reconstrução do sinal analógico  $g(t)$ , um equalizador  $E(f)$  que corrija os efeitos da amostragem não ideal  $F_0(f)$  e da reconstrução não ideal  $P(f)$  deve garantir que

$$E(f)P(f)F_0(f) = 1, |f| < B$$

# Aplicações do Teorema da Amostragem

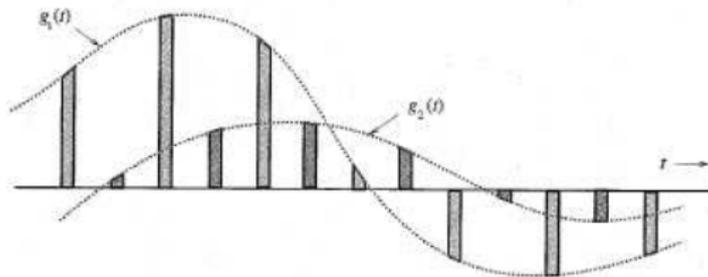
- Com a amostragem, um sinal contínuo pode ser representado por uma sequência de números
- Pode-se utilizar o valor das amostras para variar os parâmetros de um trem de pulsos periódico
  - Amplitude - (PAM - Pulse-Amplitude Modulation)
  - Largura - (PWM - Pulse-Width Modulation)
  - Posição - (PPM - Pulse-Position Modulation)
  - PCM - Pulse-Code Modulation

# Sinais Modulados em Pulso



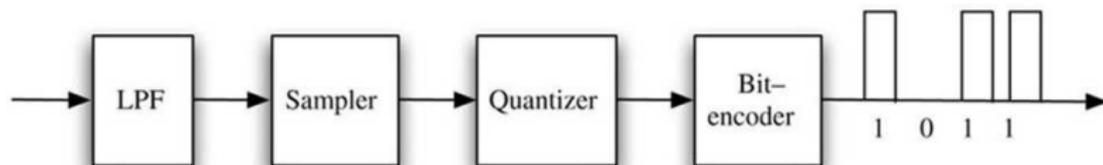
# Sinais Modulados em Pulso

- Com as modulações de pulso, pode-se utilizar a multiplexação por divisão de tempo (TDM)



## Pulse-Code Modulation (PCM)

- A Modulação por codificação de pulso (PCM) é uma ferramenta usada para a conversão A/D
- Com PCM, um sinal analógico contínuo no tempo é convertido em um sinal digital
- No processo de conversão, o sinal é amostrado e em seguida quantizado



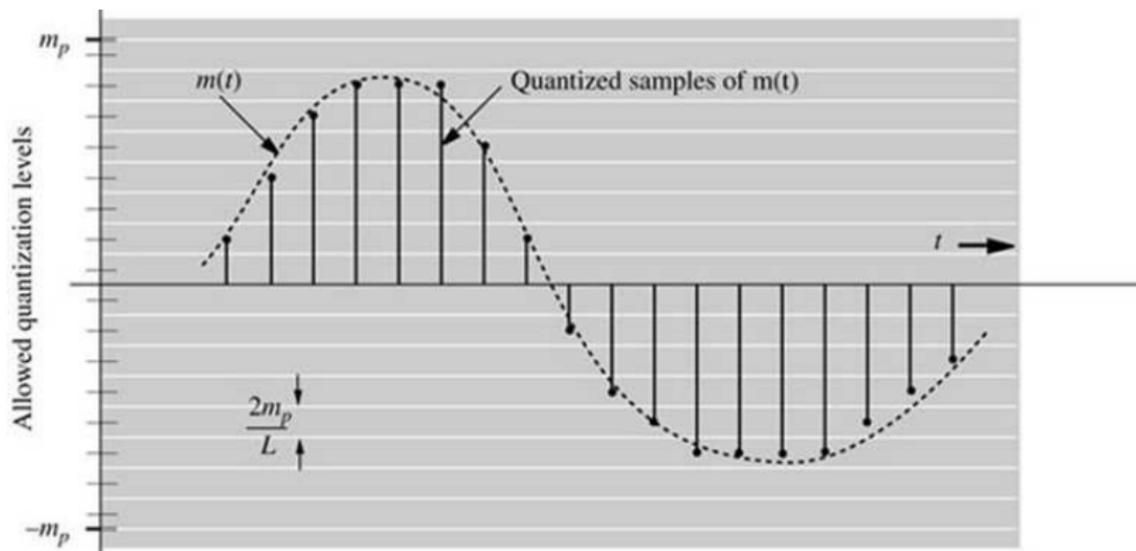
## Pulse-Code Modulation (PCM)

- Em PCM, as amplitudes são arredondadas para um dentre  $L$  níveis discretos (níveis quantizados)
- Se o sinal analógico  $m(t)$  possui amplitudes na faixa  $(-m_p, m_p)$ , o tamanho de cada intervalo é dado por:

$$\Delta v = \frac{2m_p}{L}$$

- Cada amostra é aproximada para o ponto médio do intervalo em que ela se encontra
- Um sinal desse tipo é conhecido como um sinal digital L-ário

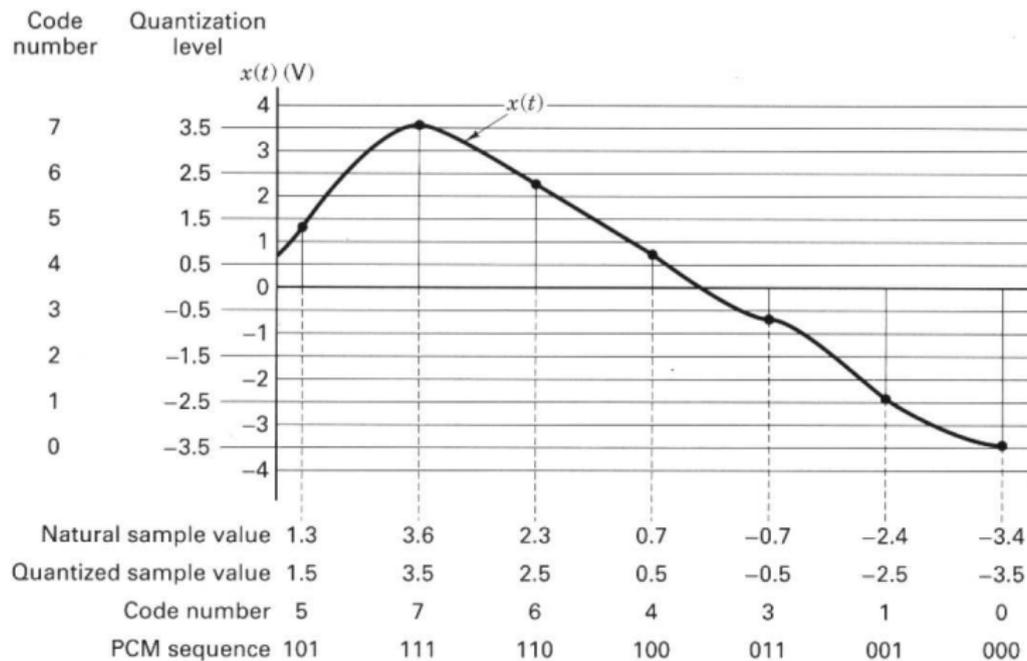
# Pulse-Code Modulation (PCM)



## Pulse-Code Modulation (PCM)

- Do ponto de vista prático, sinais binários são desejáveis
- Para converter um sinal digital  $L$ -ário em um sinal binário (2 níveis - 0 e 1) pode-se utilizar algum tipo de codificação
  - BCD, Gray, NBC, etc.
- $L$  níveis correspondem a  $L$  símbolos que correspondem a  $\log_2 L$  bits
- Em telefonia, tem-se:
  - $f_{min} = 300\text{Hz}$ ,  $f_{max} = 3400\text{Hz}$  e  $B = 3100\text{Hz}$
  - $f_s = 6,8\text{kHz}$ , mas na prática escolhe-se  $f_s = 8\text{kHz}$
  - $L = 256$  ou 8 bits por amostra
  - $R = 64\text{kbps}$

# Pulse-Code Modulation (PCM)



## Pulse-Code Modulation (PCM)

- Em som com qualidade de CD, tem-se:
  - $B = 15\text{kHz}$
  - $f_s = 30\text{kHz}$ , mas na prática escolhe-se  $f_s = 44,1\text{kHz}$
  - $L = 65536$  ou 16 bits por amostra
  - $R = 705,6\text{kbps}$

# Vantagens da Comunicação Digital

- As comunicações digitais apresentam várias vantagens, dentre as quais:
  - Maior robustez (desde que o ruído e distorções estejam dentro de limites)
  - Uso de repetidores regenerativos
  - Hardware digital (microprocessadores, circuitos integrados)
  - Multiplexação mais simples
  - Compromisso entre SNR e largura de banda
  - Armazenamento simples e barato
  - Reprodução sem deterioração
  - Custo do hardware decrescente

# Quantização

- O erro na aproximação da amostra  $m(kT_s)$  pelo ponto médio do intervalo de quantização gera um **erro de quantização**
- Seja  $m(t)$  o sinal,  $m(kT_s)$  a amostra contínua no instante  $kT_s$  e  $\hat{m}(kT_s)$  a amostra quantizada
- A partir da fórmula de interpolação, tem-se que:

$$m(t) = \sum_k m(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)$$
$$\hat{m}(t) = \sum_k \hat{m}(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)$$

- Sendo que  $\hat{m}(t)$  é o sinal reconstruído a partir de suas amostras quantizadas

# Quantização

- Seja  $q(t) = \hat{m}(t) - m(t)$ , então:

$$\begin{aligned}q(t) &= \sum_k [\hat{m}(kT_s) - m(kT_s)] \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \\ &= \sum_k q(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)\end{aligned}$$

- Em que  $q(kT_s)$  é o erro de quantização da k-ésima amostra
- $q(t)$  é chamado de ruído de quantização

## Erro de Quantização

- A potência do erro é dada por:

$$\begin{aligned} P_q &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_k q(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \right]^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2BT} \sum_k q^2(kT_s) \end{aligned}$$

- Esta equação representa a média do quadrado do erro de quantização

## Erro de Quantização

- Para se calcular  $P_q$ , pode-se admitir que o erro é uniformemente distribuído na faixa  $(-\Delta v/2, \Delta v/2)$ , assim, tem-se:

$$P_q = \frac{1}{\Delta v} \int_{-\Delta v/2}^{\Delta v/2} q^2 dq = \frac{(\Delta v)^2}{12} = \frac{m_p^2}{3L^2}$$

- A potência do ruído de quantização  $P_q$  pode ser denotada por  $N_q$  (N de noise (ruído em inglês)), assim:

$$N_q = \frac{(\Delta v)^2}{12} = \frac{m_p^2}{3L^2}$$

## Erro de Quantização

- A relação sinal ruído pode ser calculada observando-se que:

$$\hat{m}(t) = m(t) + q(t)$$

$$S_o = P_m$$

$$N_o = N_q = \frac{m_p^2}{3L^2}$$

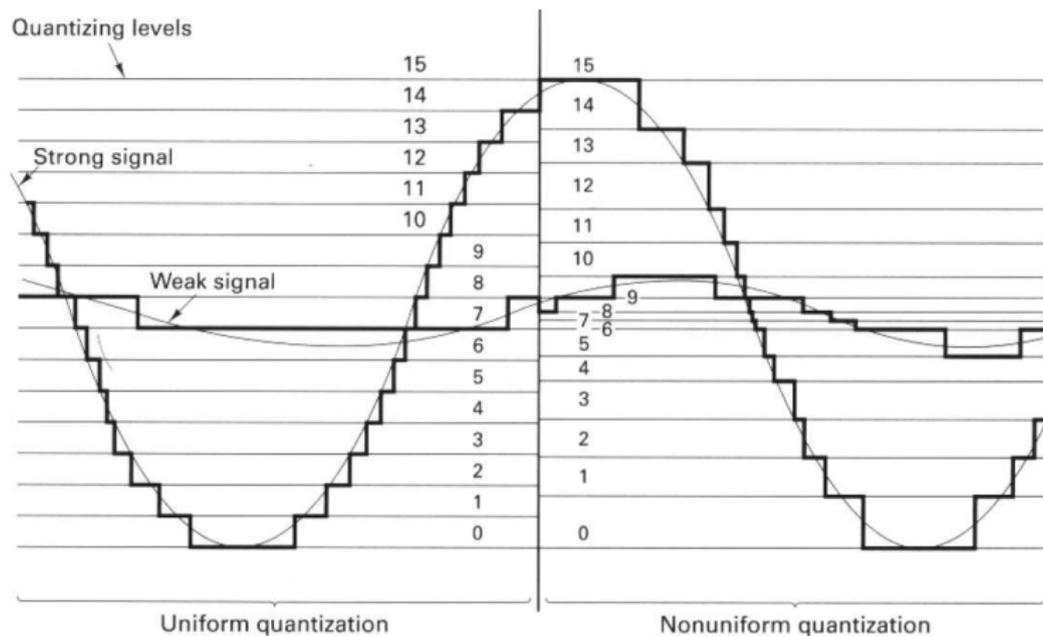
- Assim, a SNR é dada por:

$$\frac{S_o}{N_o} = 3L^2 \frac{P_m}{m_p^2}$$

## Quantização não Uniforme

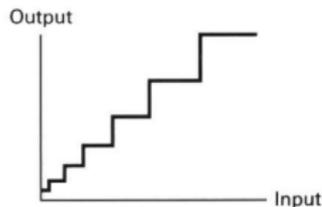
- A relação sinal ruído deveria ser constante, mas ela varia com a potência do sinal
- No caso dos sinais de voz, a SNR é maior para uma voz forte
  - Podem existir variações de até 40dB ( $10^4$ )
- A causa disso é o fato da quantização ser uniforme
  - Intervalos de mesmo tamanho
- A solução é usar um passo de quantização menor para amplitudes maiores, pois  $N_q = (\Delta v)^2 / 12$
- O equivalente de um passo de quantização menor pode ser obtido através da compressão do sinal seguida da quantização uniforme

# Quantização não Uniforme

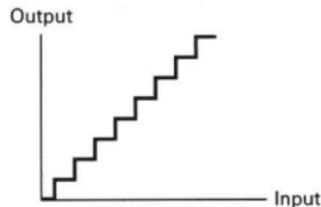
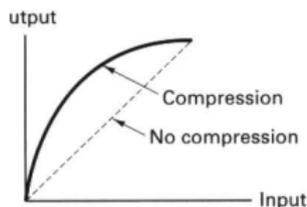


# Quantização não Uniforme

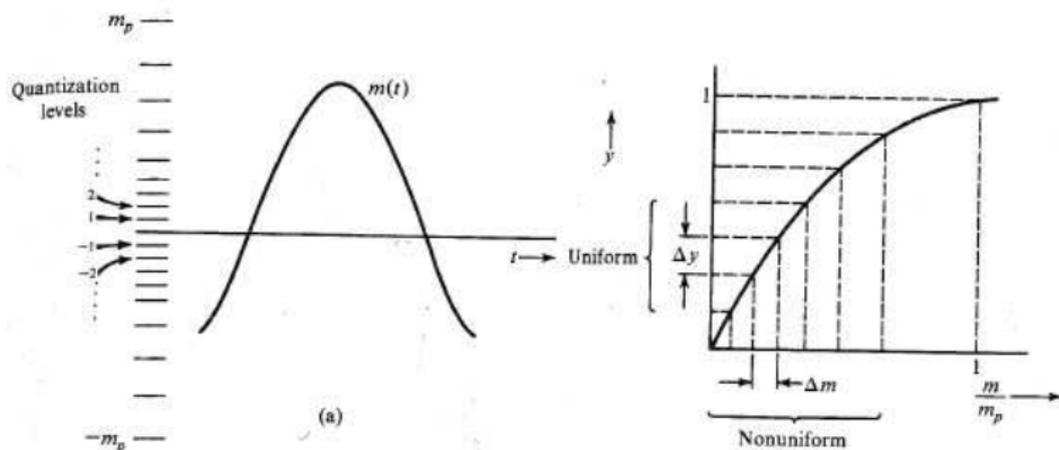
- A quantização não-uniforme pode ser realizada de duas formas:
  - Usando um quantizador não-uniforme
  - Usando uma curva característica de compressão seguida de um quantizador uniforme



(a)



# Quantização não Uniforme



## Quantização não Uniforme

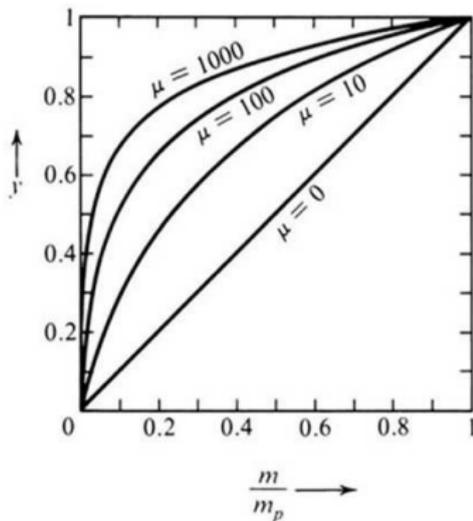
- As técnicas de compressão mais conhecidas são conhecidas como lei  $\mu$  e lei  $A$  (simetria ímpar)
- A lei  $\mu$  para amplitudes positivas é dada por:

$$y = \frac{1}{\ln(1 + \mu)} \ln \left( 1 + \frac{\mu m}{m_p} \right), \quad 0 \leq \frac{m}{m_p} \leq 1$$

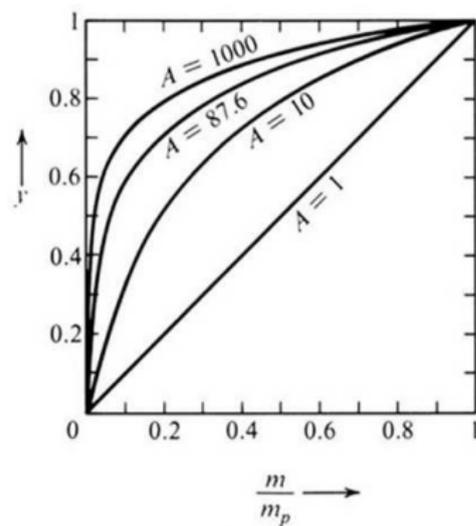
- A lei  $A$  para amplitudes positivas é dada por:

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{1 + \ln A} \left( \frac{m}{m_p} \right), \quad 0 \leq \frac{m}{m_p} \leq \frac{1}{A} \\ \frac{A}{1 + \ln A} \left( 1 + \ln \frac{Am}{m_p} \right), \quad \frac{1}{A} \leq \frac{m}{m_p} \leq 1 \end{array} \right\}$$

# Quantização não Uniforme



(a)

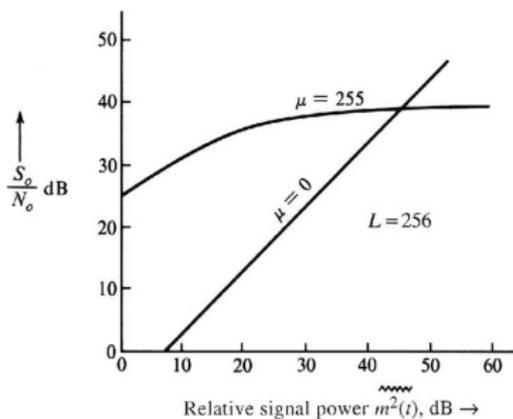


(b)

## Quantização não Uniforme

- O nível de compressão é controlado pelo parâmetro  $\mu$  ou  $A$
- Para alcançar uma SNR constante, o valor de  $\mu = 255$  é usado para 256 níveis (8 bits por amostra)
- Para esses valores, a SNR é aproximada por:

$$\frac{S_o}{N_o} \simeq \frac{3L^2}{[\ln(1 + \mu)]^2}, \quad \mu^2 \gg \frac{m_p^2}{P_m}$$



## Taxa Máxima de Informação

- É importante em comunicações digitais conhecer a taxa máxima de informação que pode ser enviada através de um canal com largura de banda de  $B$  Hz
- Uma justificativa mais coerente para os resultados mostrados a seguir pode ser dada ao se estudar o efeito da Interferência Intersimbólica
- Em um canal livre de erros, sem ruído e com largura de banda de  $B$  Hz podem ser transmitidos no máximo  $2B$  pedaços independentes de informação por segundo
  - Dois pedaços de informação por segundo para cada Hertz de largura de banda
  - Com  $2B$  amostras por segundo é possível reconstruir o sinal amostrado

## Largura de Banda

- Para o PCM binário,  $n$  bits são associados a  $L$  níveis de quantização

$$L = 2^n, \quad n = \log_2 L$$

- Cada amostra é codificada em  $n$  bits
- Se  $m(t)$  tem banda  $B$ , são necessárias  $2B$  amostras para a reconstrução ou  $2nB$  bps ( $2nB$  pedaços de informação por segundo)
- Se em 1Hz se pode transmitir 2 pedaços de informação, então para transmitir  $2nB$  pedaços é necessário uma banda teórica mínima de

$$B_T = nB \text{ Hz}$$

# Largura de Banda

- A equação anterior é válida para uma amostragem na taxa de Nyquist
- Se a taxa de amostragem é maior que a de Nyquist, então a expressão da largura de banda teórica mínima para a transmissão é

$$B_{min} = \frac{R}{2}$$

- Nessa expressão,  $R$  é a taxa de transmissão em símbolos por segundo
- Se a transmissão for binária, então  $R$  é dado em bits por segundo

# Exemplo

## Exemplo 6.2

Um sinal  $m(t)$  limitado a banda de  $3\text{kHz}$  é amostrado em uma taxa  $33\frac{1}{3}\%$  superior a taxa de Nyquist. O erro máximo aceitável nas amplitudes das amostras (erro máximo de quantização) é de  $0,5\%$  da amplitude de pico  $m_p$ . As amostras quantizadas são codificadas em binário. Encontre a largura de banda mínima do canal requerida para transmitir o sinal binário. Se 24 desses sinais são multiplexados no tempo, determine a largura de banda mínima necessária para transmitir o sinal multiplexado.

## Exemplo

## Solução - Exemplo 6.2

$$f_N = 2 \times 3000 = 6000\text{Hz}$$

$$f_s = 6000 + (1/3)6000 = 8000\text{Hz}$$

$$\frac{\Delta v}{2} = \frac{m_p}{L} = 0,5\%m_p \implies L = 200$$

$$L = 256 \implies n = 8\text{bits}$$

$$R = 8 \times 8000 = 64000\text{bps}$$

$$2\text{bits/s/Hz} \implies B_{min} = R/2 = 32\text{kHz}$$

$$R_M = 24 \times 64000 = 1,536\text{Mbps}$$

$$B_{min(M)} = R_M/2 = 0,768\text{MHz}$$

## Largura de Banda e SNR

- Para o PCM binário,  $L = 2^n \implies L^2 = 2^{2n}$  e assim:

$$\frac{S_o}{N_o} = c(2)^{2n} = c(2)^{2B_T/B}$$

- Em que:

$$c = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3P_M}{m_p^2}, & \text{Sem compressão} \\ \frac{3}{[\ln(1+\mu)]^2}, & \text{Com compressão} \end{array} \right\}$$

- A SNR cresce exponencialmente com a largura de banda da transmissão  $B_T$

# Largura de Banda e SNR

- Em dB, tem-se:

$$\begin{aligned}\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{dB} &= 10 \log_{10} \left(\frac{S_o}{N_o}\right) \\ &= 10 \log_{10} [c(2)^{2n}] \\ &= 10 \log_{10} c + 20n \log_{10} 2 \\ &= (\alpha + 6n)dB\end{aligned}$$

- Em que  $\alpha = 10 \log_{10} c$
- Assim, o aumento de um bit proporciona um aumento de 6dB na SNR (quadruplica)

# Exemplo

## Exemplo 6.3

Um sinal  $m(t)$  com largura de banda de  $4\text{kHz}$  é transmitido usando PCM com compressão com parâmetro  $\mu = 100$ . Compare a largura de banda e a SNR quando  $L = 64$  e  $L = 256$ .

## Solução - Exemplo 6.3

Para  $L = 64$  e  $n = 6$ ,  $B_T = nB = 24\text{kHz}$

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{dB} = (\alpha + 36) = 27,49\text{dB}$$

Para  $L = 256$  e  $n = 8$ ,  $B_T = nB = 32\text{kHz}$

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{dB} = (\alpha + 48) = 39,49\text{dB}$$

# Exemplo

## Exemplo 6.3

Um sinal  $m(t)$  com largura de banda de  $4\text{kHz}$  é transmitido usando PCM com compressão com parâmetro  $\mu = 100$ . Compare a largura de banda e a SNR quando  $L = 64$  e  $L = 256$ .

## Solução - Exemplo 6.3

Para  $L = 64$  e  $n = 6$ ,  $B_T = nB = 24\text{kHz}$

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{dB} = (\alpha + 36) = 27,49\text{dB}$$

Para  $L = 256$  e  $n = 8$ ,  $B_T = nB = 32\text{kHz}$

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{dB} = (\alpha + 48) = 39,49\text{dB}$$

## PCM Diferencial (DPCM)

- Amostras sucessivas são correlacionadas (semelhantes)
- Uma opção é transmitir a diferença entre as amostras em vez da amostra em si
  - Menos bits são necessários
- Esse esquema pode ser aprimorado usando-se estimativas (predições) com base nos valores anteriores
- A diferença entre o valor da amostra e de sua estimativa é dada por:

$$d[k] = m[k] - \hat{m}[k]$$

## PCM Diferencial (DPCM)

- A predição  $\hat{m}[k]$  pode ser obtida a partir da representação em séries de Taylor de  $m(t + T_s)$

$$\begin{aligned} m(t + T_s) &= m(t) + T_s \frac{dm}{dt} + \frac{T_s^2}{2!} \frac{d^2m}{dt^2} + \dots \\ &\approx m(t) + T_s \frac{dm}{dt} \quad (T_s \text{ pequeno}) \end{aligned}$$

- Para  $t = kT_s$  e simplificando-se a notação  $m(kT_s) = m(k)$ , tem-se que:

$$m[k + 1] = m[k] + T_s \frac{(m[k] - m[k - 1])}{T_s} = 2m[k] - m[k - 1]$$

## PCM Diferencial (DPCM)

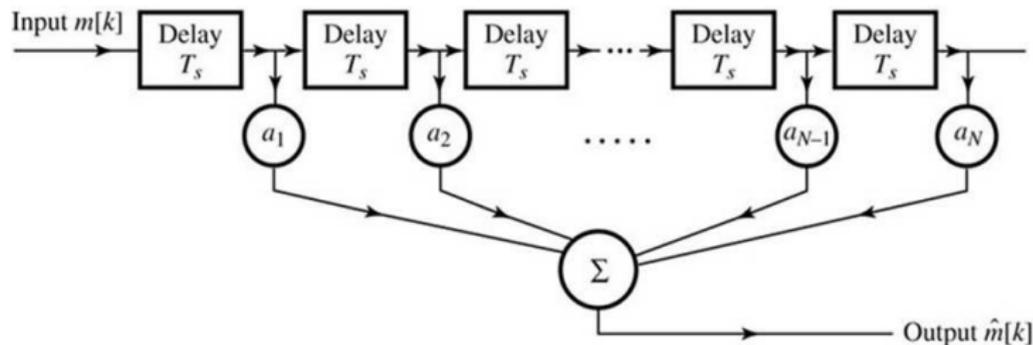
- A amostra no instante  $k + 1$  depende das duas amostras anteriores
- No caso geral, quanto maior a quantidade de termos, melhor é a estimativa

$$\hat{m}[k] = a_1 m[k - 1] + a_2 m[k - 2] + \dots + a_N m[k - N]$$

- Essa equação representa um preditor linear cujos coeficientes  $a_j$  são escolhidos de modo a minimizar algum critério como o erro médio quadrático

# PCM Diferencial (DPCM)

- Filtro transversal usado como preditor linear



## PCM Diferencial (DPCM)

- Assim, no DPCM transmite-se a diferença entre o sinal no instante  $kT_S$  e o seu valor estimado através de um filtro preditor
- No receptor, a estimativa é gerada através das amostras passadas e o valor real é obtido somando-se a estimativa ao valor de  $d[k]$
- Como os sistemas são digitais, alguns ajustes precisam ser feitos
- Nos sistemas digitais, tanto as amostras, quanto a diferença são versões quantizadas dos valores reais
- Assim, no DPCM, o que é transmitido é a diferença quantizada do sinal

$$d[k] = m[k] - \hat{m}_q[k]$$

## PCM Diferencial (DPCM)

- A diferença quantizada produz um erro de quantização  $q[k]$ , ou seja

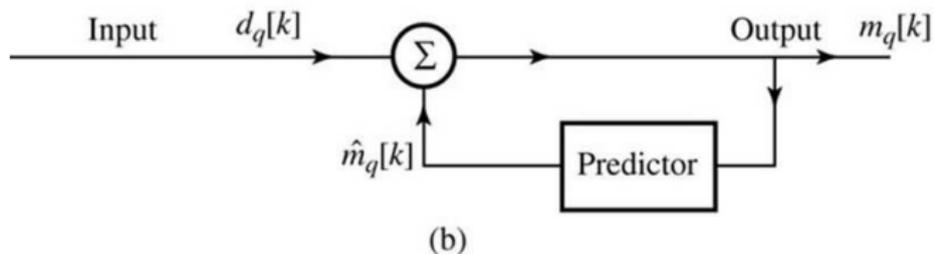
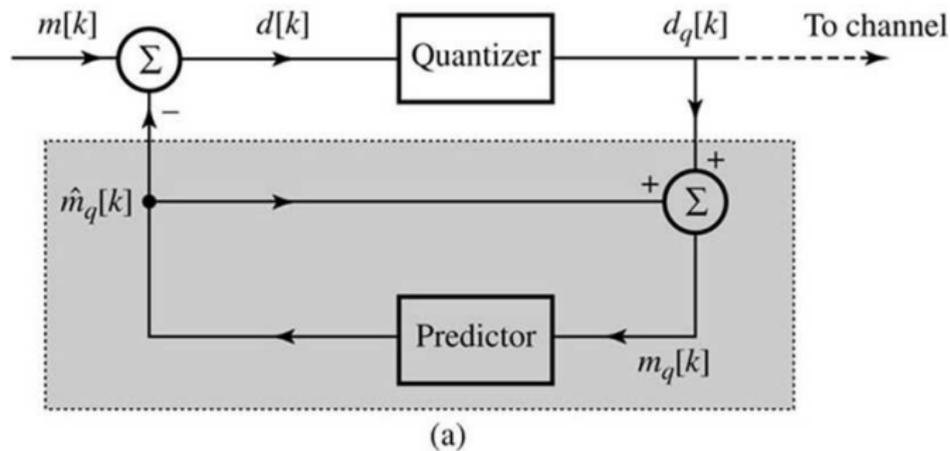
$$d_q[k] = d[k] + q[k]$$

- No receptor, a diferença quantizada é somada com a estimativa quantizada, resultando no sinal quantizado  $m_q[k]$

$$\begin{aligned} m_q[k] &= \hat{m}_q[k] + d_q[k] = m[k] - d[k] + d_q[k] \\ &= m[k] - d[k] + d[k] + q[k] = m[k] + q[k] \end{aligned}$$

- Com as amostras quantizadas recuperadas, é possível recuperar o sinal analógico  $m(t)$  a partir dos procedimentos vistos anteriormente

# PCM Diferencial (DPCM)



## PCM Diferencial (DPCM)

- O ganho obtido com o DPCM é chamado de ganho de predição
- Se o mesmo  $L$  é usado para PCM e DPCM e  $m_p$  e  $d_p$  são os valores de pico, então o ruído de quantização em DPCM é reduzido por um fator de

$$\left(\frac{m_p}{d_p}\right)^2$$

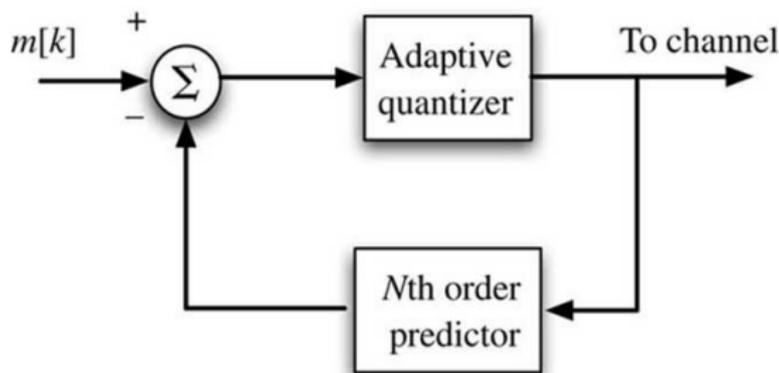
- A SNR cresce por um fator de

$$G_p = \frac{P_m}{P_d}$$

- Se a SNR é mantida igual para ambos, o DPCM usa em torno de 3 a 4 bits a menos por amostra

## PCM Diferencial Adaptativo (ADPCM)

- No ADPCM, o intervalo de quantização  $\Delta v$  é modificado de acordo com o valor do erro quantizado  $d_q[k]$
- Isto proporciona uma redução na quantidade de bits transmitidos sem perdas consideráveis na qualidade



## Modulação Delta

- Similar ao DPCM, mas utilizando apenas 1 bit para codificar a diferença  $m[k] - \hat{m}_q[k]$  ( $L=2$ )
- Para compensar essa baixa resolução, a amostragem é feita em uma taxa superior (superamostragem  $\sim 4f_s$ )
- O resultado é um método simples e barato em relação aos anteriores
- O preditor é de primeira ordem, ou seja:

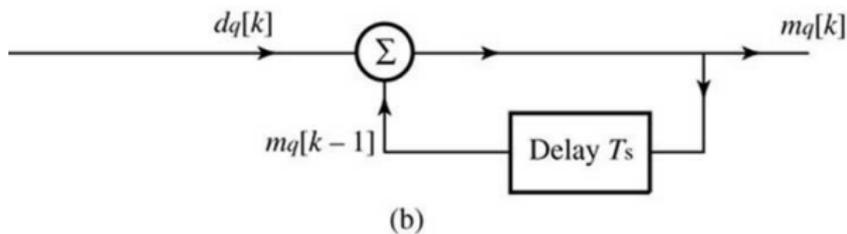
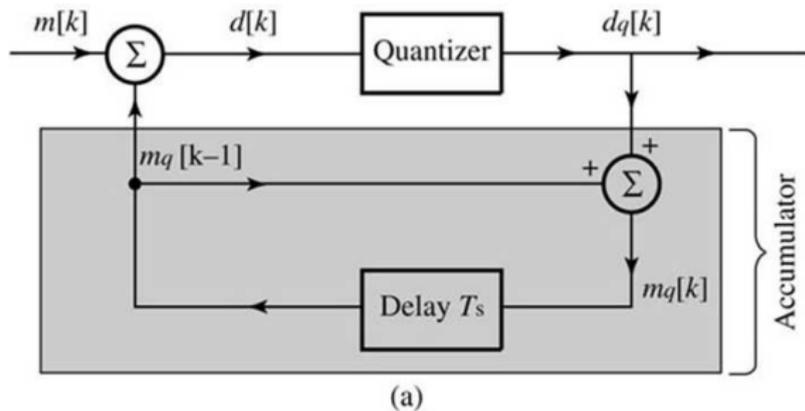
$$\hat{m}_q[k] = m_q[k - 1]$$

$$m_q[k] = \hat{m}_q[k] + d_q[k] = m_q[k - 1] + d_q[k]$$

- Procedendo-se recursivamente, o sinal obtido no receptor é dado por

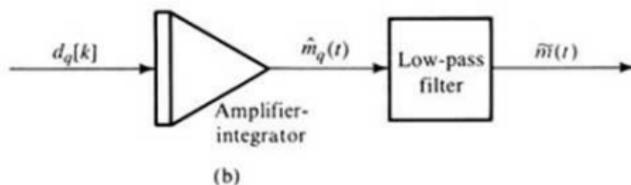
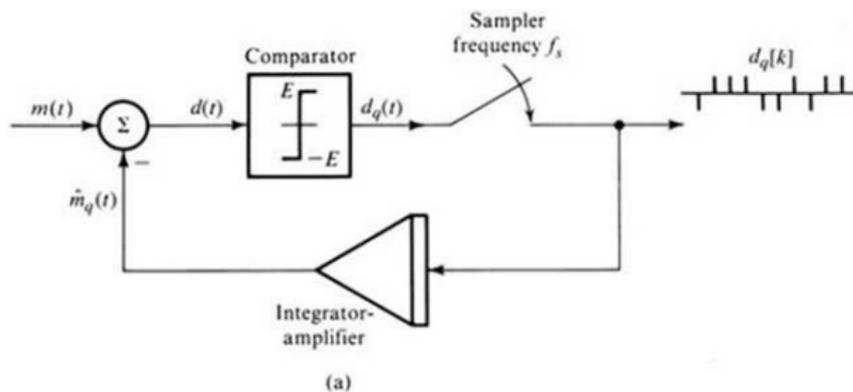
$$m_q[k] = \sum_{m=0}^k d_q[m]$$

# Modulação Delta



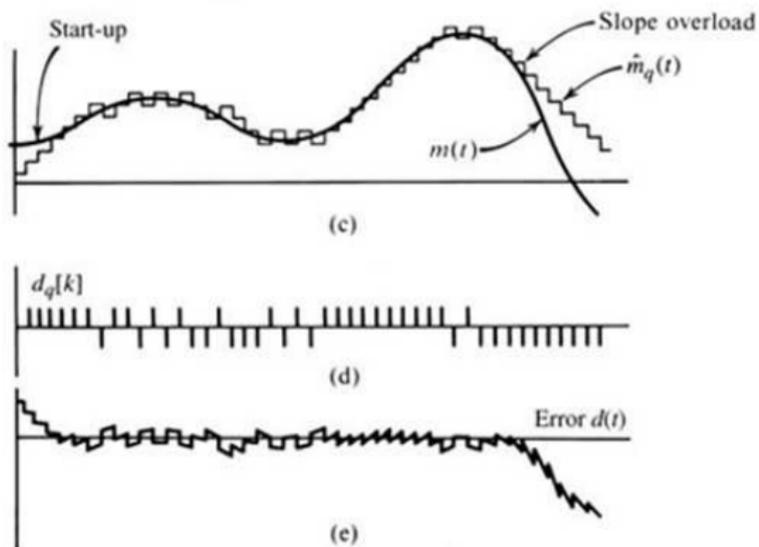
# Modulação Delta

- Implementação prática da modulação delta



# Modulação Delta

- Erros na modulação delta e a sobrecarga de inclinação



## Modulação Delta

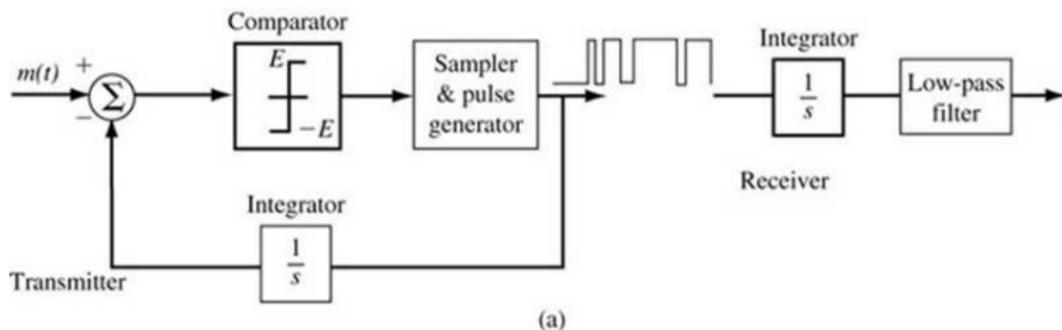
- Na figura anterior, pode-se observar que quando a inclinação é muito acentuada, a modulação delta não consegue acompanhar o sinal, dando origem ao ruído de sobrecarga de inclinação
- Isto poderia ser corrigido com um incremento maior, mas aumentaria o ruído granular
- Existe portanto um valor ótimo de equilíbrio
- Para que não ocorra sobrecarga de inclinação, é necessário que

$$|\dot{m}(t)| < Ef_s = \frac{E}{T_s}$$

- É possível também obter uma versão adaptativa da modulação delta, a ADM, na qual a altura do degrau é ajustada automaticamente

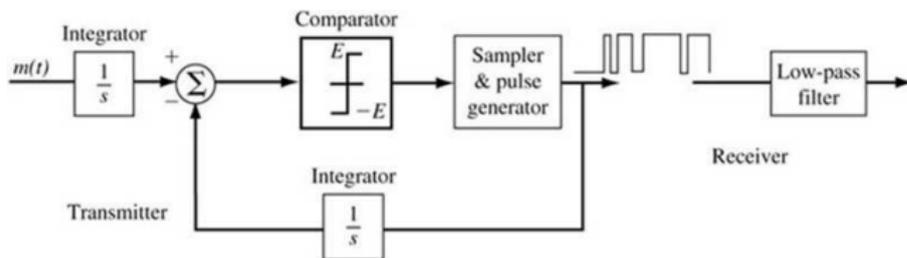
# Modulação Sigma-Delta

- Na modulação delta, o ruído do canal é integrado pelo receptor

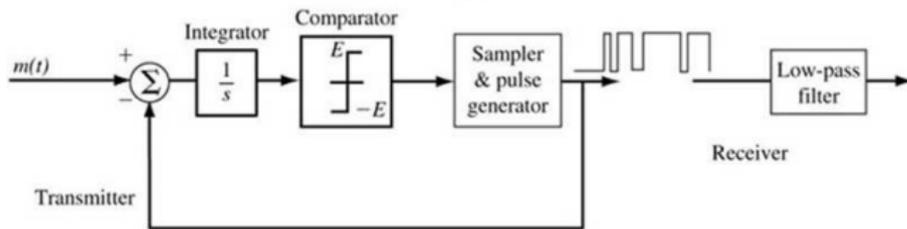


# Modulação Sigma-Delta

- Usando propriedades dos sistemas lineares, a modulação delta pode ser modificada dando origem a modulação sigma-delta



(b)



(c)

# Modulação Sigma-Delta

- A modulação sigma-delta apresenta diversas vantagens:
  - Ruído não se acumula no demodulador
  - Pré-ênfase nas baixas frequências
  - O sinal é suavizado antes da codificação (sobrecarga menos provável)
  - Integrador aumenta a correlação entre amostras sucessivas
  - Demodulador simplificado