Modulação em Ângulo

Edmar José do Nascimento
(Princípios de Comunicações)
http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Roteiro

1. Conceitos Básicos
2. Análise Espectral
3. Geração de FM
4. Demodulação de FM
5. Extras

Introdução

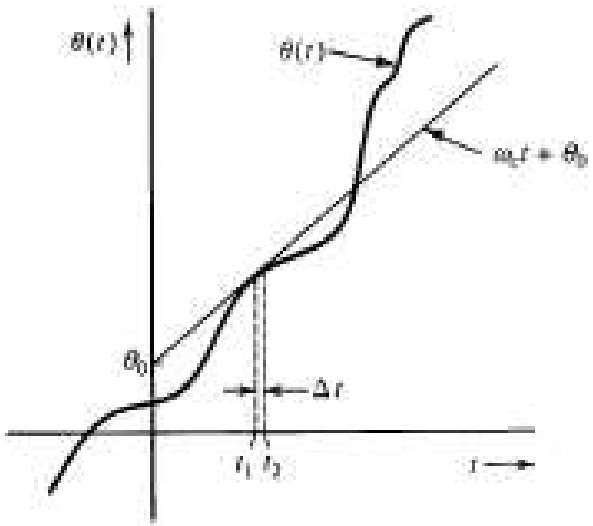
- Na modulação em amplitude, a amplitude da portadora é variada de acordo com o sinal modulante
- Também é possível variar a frequência ou a fase da portadora de acordo com o sinal modulante
  - FM - *Frequency Modulation*
  - PM - *Phase Modulation*
- A modulação FM foi desenvolvida com o objetivo de reduzir o efeito do ruído
  - Procurava-se reduzir a banda e consequentemente, o ruído
  - Entretanto, FM possui uma banda maior ou igual a AM
  - Mesmo assim, o seu desempenho é melhor

Frequência Instantânea

- Um sinal senoidal generalizado pode ser definido como:

$$\varphi(t) = A\cos\theta(t)$$

- Em que $\theta(t)$ é denominado de ângulo generalizado



Frequência Instantânea

- Para uma senóide convencional, tem-se que:

$$\varphi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_0)$$

- Nesse caso, $\theta(t)$ é uma linha reta com inclinação ω_c
- Sob um pequeno intervalo Δt, a frequência de $\varphi(t)$ é ω_c
- Pode-se então generalizar e definir-se a frequência instantânea como a inclinação de $\theta(t)$, ou seja:

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \omega_i(\alpha) d\alpha$$

Frequência Instantânea

- Dependendo do ângulo $\theta(t)$, tem-se um dos vários tipos de modulação em ângulo ou modulação exponencial
- Modulação em fase

$$\theta(t) = \omega_c t + \theta_0 + k_p m(t)$$

  - Pode-se considerar $\theta_0 = 0$, assim:

$$\theta(t) = \omega_c t + k_p m(t)$$

  - E o sinal modulado em fase é dado por:

$$\varphi_{PM}(t) = A \cos\left[\omega_c t + k_p m(t)\right]$$

Frequência Instantânea

- Para a modulação em fase, a frequência instantânea é dada por:

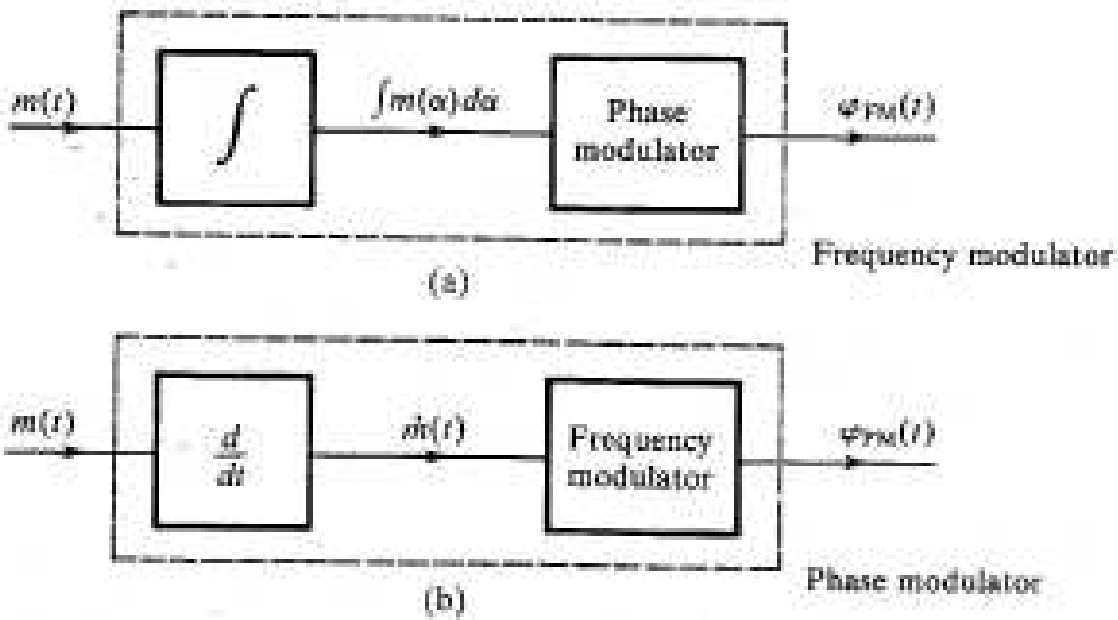
$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_p \dot{m}(t)$$

- Modulação em frequência

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= \int_{-\infty}^{t} [\omega_c + k_f m(\alpha)] d\alpha = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha \\
\omega_i(t) &= \omega_c + k_f m(t) \\
\varphi_{FM}(t) &= A \cos \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha \right]
\end{aligned}$$

Modulação em Ângulo

- As modulações em fase e em frequência podem ser obtidas uma a partir da outra



Modulação em Ângulo

- As modulações FM e PM são um caso particular da modulação em ângulo
- No caso geral, tem-se que:

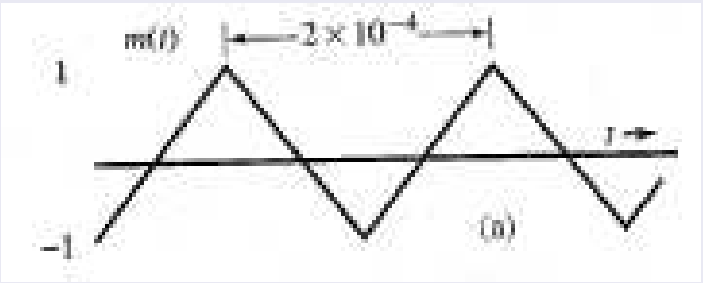
$$\begin{aligned} \varphi_{EM}(t) &= A\cos\left[\omega_c t + \psi(t)\right] \\ &= A\cos\left[\omega_c t + \int_{-\infty}^{t} m(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha\right] \end{aligned}$$

- Se $h(t) = k_p\delta(t)$ tem-se a modulação PM
- Se $h(t) = k_f u(t)$ tem-se a modulação FM

Exemplo

Exemplo

Esboce os sinais φ_{FM} e φ_{PM} para o sinal $m(t)$ mostrado abaixo com $k_f = 2\pi \times 10^5$ e $k_p = 10\pi$ para $f_c = 100MHz$



Solução

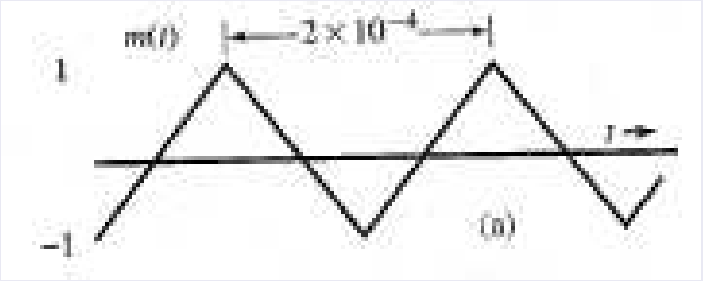
$$f_i = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) = 10^8 + 10^5 m(t) \quad (FM)$$

$$f_i = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \dot{m}(t) = 10^8 + 5\dot{m}(t) \quad (PM)$$

Exemplo

Exemplo

Esboce os sinais φ_{FM} e φ_{PM} para o sinal $m(t)$ mostrado abaixo com $k_f = 2\pi \times 10^5$ e $k_p = 10\pi$ para $f_c = 100MHz$



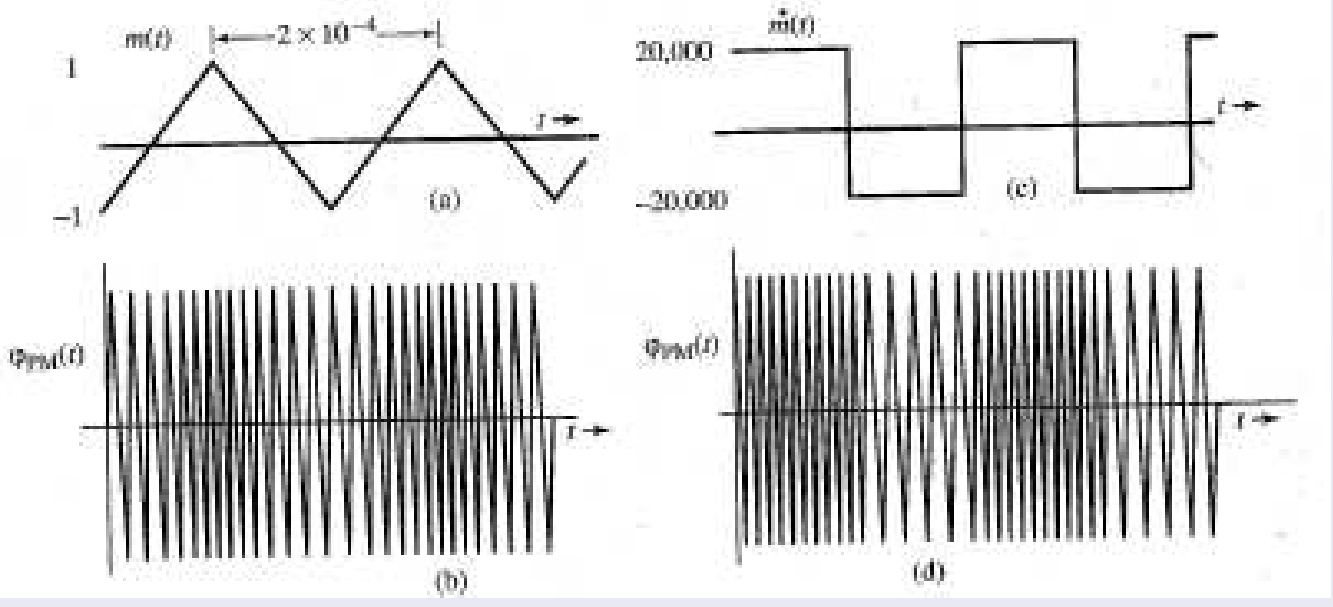
Solução

$$f_i = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) = 10^8 + 10^5 m(t) \quad (FM)$$

$$f_i = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \dot{m}(t) = 10^8 + 5\dot{m}(t) \quad (PM)$$

Exemplo

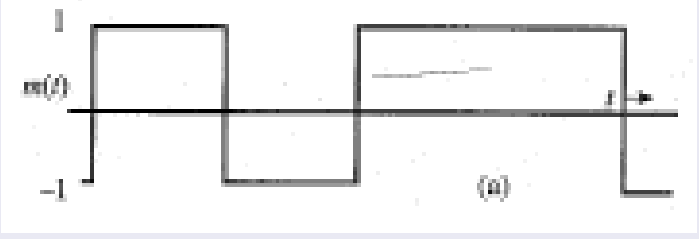
Solução



Exemplo

Exemplo

Esboce os sinais φ_{FM} e φ_{PM} para o sinal digital $m(t)$ mostrado abaixo com $k_f = 2\pi \times 10^5$ e $k_p = \pi/2$ para $f_c = 100MHz$



Solução

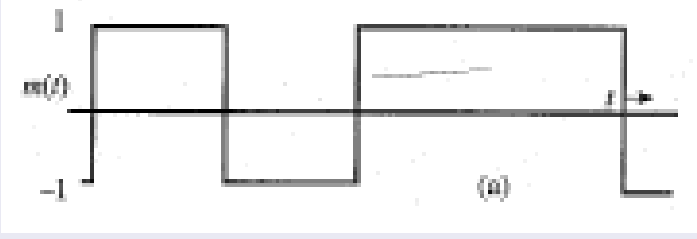
$$f_i = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) = 10^8 + 10^5 m(t) \quad (FM)$$

$$\varphi_{PM} = A\cos\left[\omega_c t + \frac{\pi}{2} m(t)\right] \quad (PM)$$

Exemplo

Exemplo

Esboce os sinais φ_{FM} e φ_{PM} para o sinal digital $m(t)$ mostrado abaixo com $k_f = 2\pi \times 10^5$ e $k_p = \pi/2$ para $f_c = 100MHz$



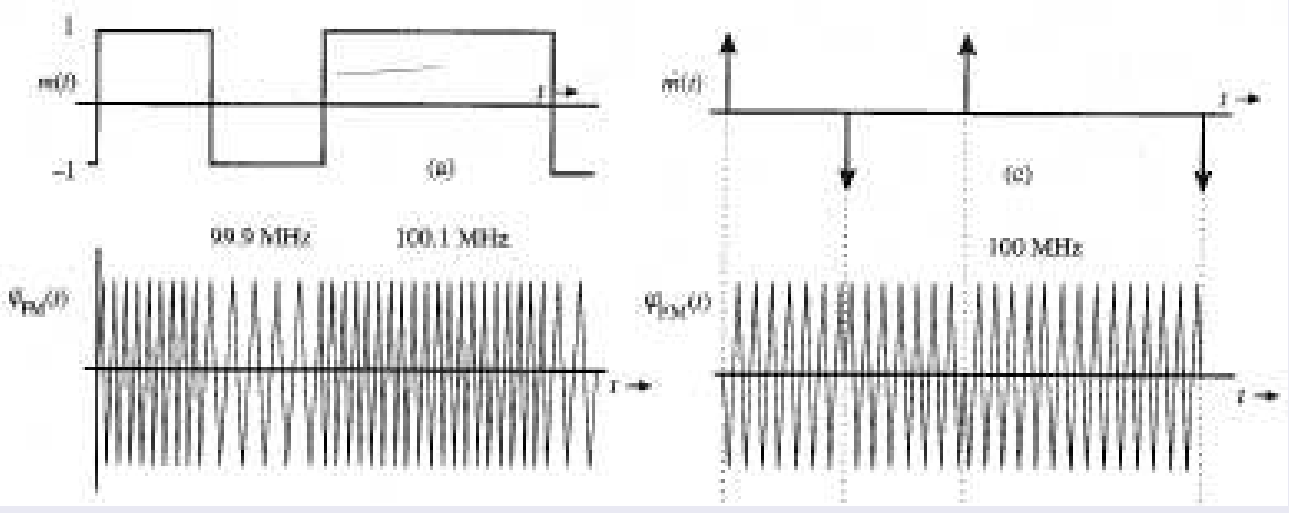
Solução

$$f_i = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) = 10^8 + 10^5 m(t) \quad (FM)$$

$$\varphi_{PM} = A\cos\left[\omega_c t + \frac{\pi}{2} m(t)\right] \quad (PM)$$

Exemplo

Solução



Largura de Banda de Sinais Modulados em Ângulo

- Como as modulações em ângulo não são lineares, é bem mais complicado obter expressões para a largura de banda
- Para as modulações FM e PM podem ser considerados dois casos:
  - FM/PM de banda estreita (NBFM - Narrow-band FM; NBPM - Narrow-band PM)
  - FM/PM de banda larga (WBFM - Wide-band FM; WBPM - Wide-band PM)

FM/PM de Banda Estreita

- Seja

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha \\ \hat{\varphi}_{FM}(t) &= A e^{j[\omega_c t + k_f a(t)]} = A e^{j k_f a(t)} e^{j \omega_c t} \end{aligned}$$

- Então,

$$\varphi_{FM}(t) = Re\{\hat{\varphi}_{FM}(t)\}$$

- Expandindo-se $e^{j k_f a(t)}$ em séries de potência, tem-se:

$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = A\left[1 + j k_f a(t) - \frac{k_f^2}{2!} a^2(t) + \cdots + j^n \frac{k_f^n}{n!} a^n(t) + \right] e^{j \omega_c t}$$

FM/PM de Banda Estreita

- Então o sinal FM é dado por:

$$\begin{aligned}\varphi_{FM}(t) &= Re\{\hat{\varphi}_{FM}(t)\} \\ &= A\left[\cos\omega_c t - k_f a(t)\sin\omega_c t - \frac{k_f^2}{2!}a^2(t)\cos\omega_c t \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_f^3}{3!}a^3(t)\sin\omega_c t + \cdots\right]\end{aligned}$$

- Se $m(t)$ tem banda B, então $a(t)$ também tem banda B
- Os termos $a^2(t)$, $a^3(t)$ e $a^n(t)$ possuem larguras de banda $2B$, $3B$ e nB, respectivamente
- Se $|k_f a(t)| \ll 1$, então os termos de ordem superior podem ser desprezados

FM/PM de Banda Estreita

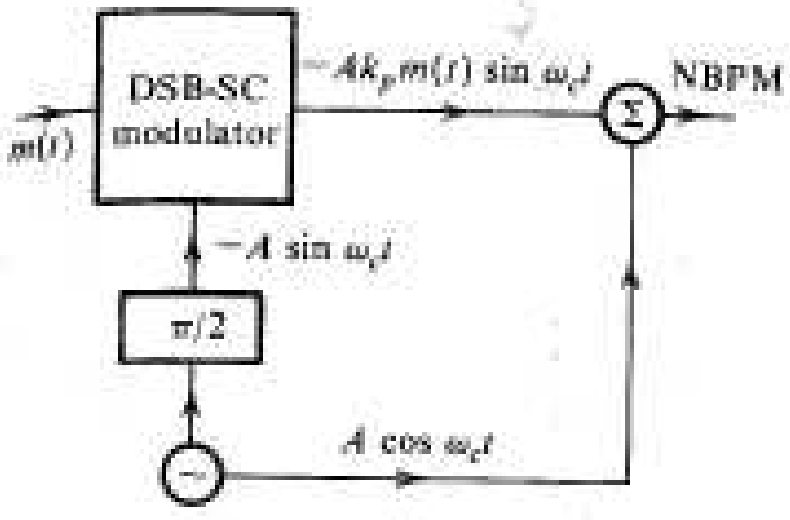
- Sendo assim, o sinal FM de banda estreita pode ser aproximado por:

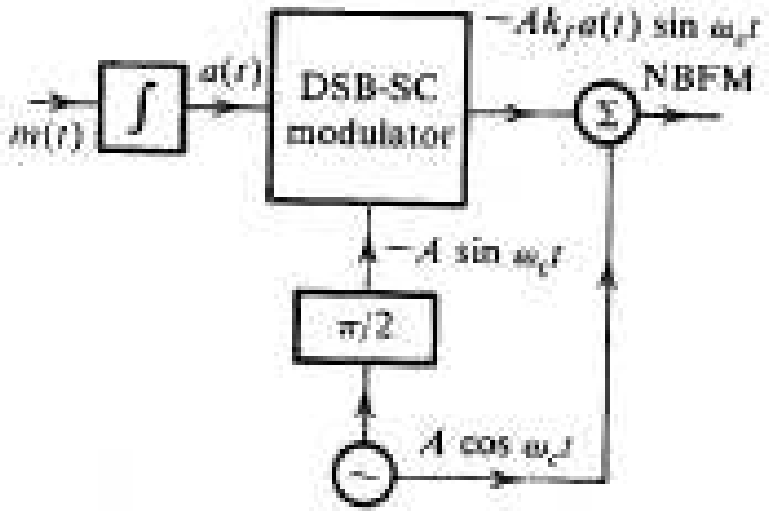
$$\varphi_{FM}(t) \simeq A\left[\cos\omega_c t - k_f a(t)\sin\omega_c t\right]$$

- Nesse caso, a banda do sinal FM é $2B$, igual ao AM-DSB
- Para a modulação PM, um resultado similar é obtido, ou seja:

$$\varphi_{PM}(t) \simeq A\left[\cos\omega_c t - k_p m(t)\sin\omega_c t\right]$$

FM/PM de Banda Estreita





FM/PM de Banda Larga

- Se a aproximação $|k_f a(t)| \ll 1$ não é satisfeita, então a expressão obtida para o NBFM/NBPM não é mais válida
- Para o FM de banda larga, uma boa aproximação da largura de banda é dada pela Regra de Carson
- Seja B a banda de $m(t)$ e k_f a constante do FM, então:

$$B_{FM} = 2(\Delta f + B)$$

- Sendo que Δf representa o desvio em frequência da portadora em Hertz dado por:

$$\Delta f = \frac{k_f m_p}{2\pi}$$

FM/PM de Banda Larga

- Em radianos, pode-se obter uma expressão similar com $W = 2\pi B$:

$$W_{FM} = 2(\Delta\omega + W)$$

- Sendo que $\Delta\omega$ representa o desvio em frequência da portadora em rad/s dado por:

$$\Delta\omega = k_f m_p$$

FM/PM de Banda Larga

- A partir da regra de Carson, podem ser considerados dois casos específicos
  - $\Delta f \gg B$ (Banda bem larga)

$$B_{FM} \simeq 2\Delta f$$

  - $\Delta f \ll B$ (Banda estreita)

$$B_{FM} \simeq 2B$$

- Uma outra forma de expressar a regra de Carson é através do índice de modulação FM denotado por β

$$\beta = \frac{\Delta f}{B}$$

FM/PM de Banda Larga

- Tem-se que:

$$B_{FM} = 2B(\beta + 1)$$

- Para a modulação em fase, as fórmulas anteriores são válidas necessitando-se apenas substituir o desvio em frequência por:

$$\Delta\omega = k_p m'_p, \quad \Delta f = \frac{k_p m'_p}{2\pi}$$

- Sendo,

$$m'_p = [\dot{m}(t)]_{max}$$

Modulação de um Tom

- A validade da regra de Carson pode ser verificada para o caso da modulação de um tom, ou seja:

$$m(t) = \alpha \cos \omega_m t$$

- Nesse caso,

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha = \frac{\alpha}{\omega_m} \sin \omega_m t \\ \hat{\varphi}_{FM}(t) &= A e^{j[\omega_c t + k_f \frac{\alpha}{\omega_m} \sin \omega_m t]} \\ \Delta\omega &= k_f m_p = \alpha k_f \\ \beta &= \frac{\Delta f}{B} = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\alpha k_f}{\omega_m} \end{aligned}$$

Modulação de um Tom

- Pode-se então reescrever $\hat{\varphi}_{FM}(t)$ como

$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = Ae^{j[\omega_c t + \beta \sin \omega_m t]} = Ae^{j\omega_c t}(e^{j\beta \sin \omega_m t})$$

- A segunda exponencial é um sinal periódico com período $2\pi/\omega_m$ que pode ser escrito na forma exponencial das séries de Fourier, resultando em:

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega_m t}$$

- Com coeficientes dados por:

$$C_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m} e^{j\beta \sin \omega_m t} e^{-jn\omega_m t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx$$

Modulação de um Tom

- Essa integral é denominada de função de Bessel do primeiro tipo e n-ésima ordem e denotada por $J_n(\beta)$
  - $J_n(\beta)$ não pode ser resolvida analiticamente
  - Entretanto, os seus valores podem ser encontrados em tabelas
- Assim, tem-se:

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j\omega_m t}$$

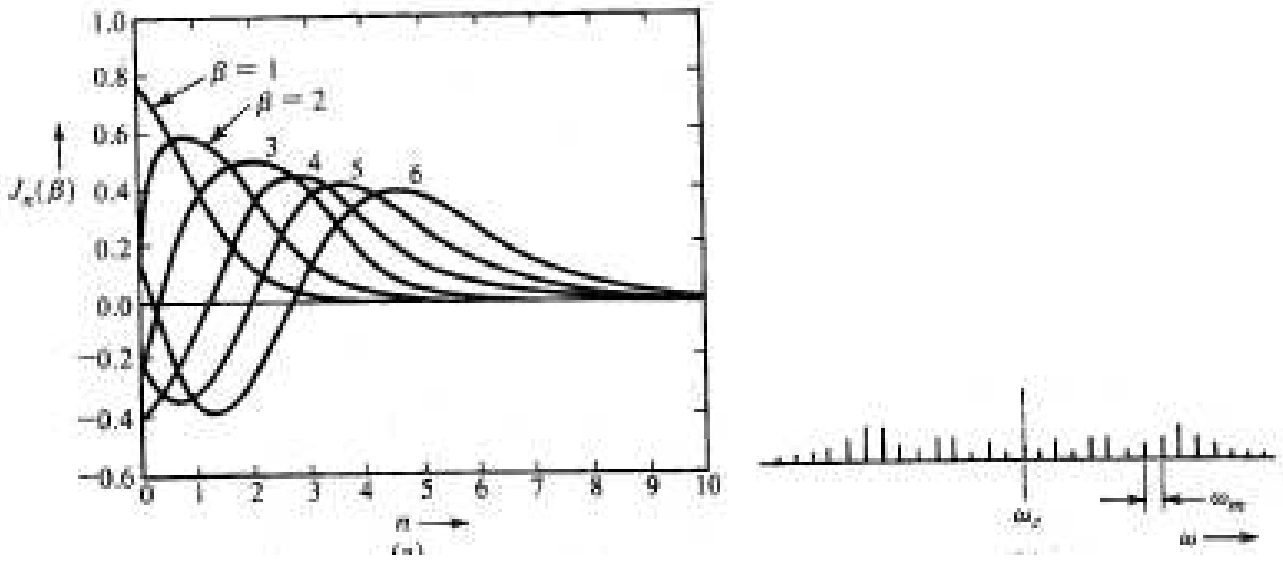
$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(\omega_c t + n\omega_m t)}$$

$$\varphi_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

Modulação de um Tom

- Como $J_n(\beta)$ é desprezível para $n > \beta + 1$, então a quantidade de bandas significativas é $\beta + 1$ e tem-se:

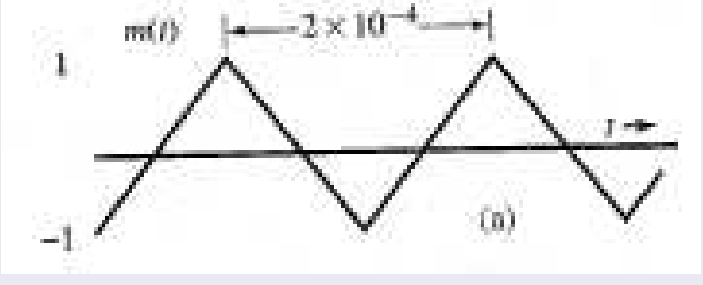
$$B_{FM} = 2nf_m = 2(\beta + 1)f_m = 2(\Delta f + B)$$



Exemplo

Exemplo 5.3 (Lathi)

(a) Estime B_{FM} e B_{PM} para o sinal modulante $m(t)$ mostrado abaixo para $k_f = 2\pi \times 10^5$ e $k_p = 5\pi$.
(b) Repita o problema se a amplitude de m(t) é duplicada.



Exemplo

Solução

$$
\begin{aligned}
m(t) &= \sum_n C_n \cos n\omega_0 t, \quad \omega_0 = 10^4\pi \\
C_n &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{8}{\pi^2 n^2}, \quad n \text{ ímpar} \\ 0, \quad n \text{ par} \end{array} \right\} \\
B &= 15kHz \text{ (Terceira harmônica)} \\
B_{FM} &= 2(\Delta f + B) = 230kHz(a) \\
B_{PM} &= 2(\Delta f + B) = 130kHz(a) \\
B_{FM} &= 2(\Delta f + B) = 430kHz(b) \\
B_{PM} &= 2(\Delta f + B) = 230kHz(b)
\end{aligned}
$$

Características da Modulação em Ângulo

- Na modulação AM, a largura de banda é fixa
- Na modulação em ângulo, a largura de banda é controlada pelo Δf
- Na modulação AM, o efeito de não linearidades é a distorção
- Os sistemas modulados em ângulo são imunes a não linearidades
  - Amplitude constante da portadora

Imunidade a não Linearidades

- Os efeitos não lineares não afetam os sinais modulados em ângulo e podem ainda ser usados na geração de sinais
- Considerando-se por exemplo um elemento não linear de segunda ordem dado por:

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t)$$

- Um sinal modulado em ângulo pode ser representado por:

$$x(t) = \cos\left[\omega_c t + \psi(t)\right]$$

Imunidade a não Linearidades

- Então, tem-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 \cos\left[\omega_c t + \psi(t)\right] + a_2 \cos^2\left[\omega_c t + \psi(t)\right] \\ &= \frac{a_2}{2} + a_1 \cos\left[\omega_c t + \psi(t)\right] + \frac{a_2}{2} \cos\left[2\omega_c t + 2\psi(t)\right] \end{aligned}$$

- Para FM, tem-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a_2}{2} + a_1 \cos\left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha\right] \\ &\quad + \frac{a_2}{2} \cos\left[2\omega_c t + 2k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha\right] \end{aligned}$$

- O termo DC é filtrado e a informação continua intacta em duas frequências ω_c e $2\omega_c$

Imunidade a não Linearidades

- Os dispositivos não lineares desse tipo são chamados de multiplicadores de frequência
- Essa análise pode ser generalizada para um dispositivo não linear de ordem n

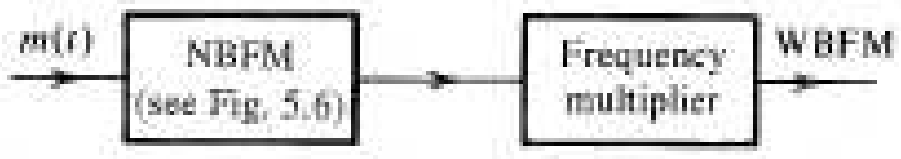
$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \cdots + a_n x^n(t)$$

- Tem-se para FM:

$$\begin{aligned} y(t) = & \; c_0 + c_1 \cos\left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha\right] \\ & + c_2 \cos\left[2\omega_c t + 2k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha\right] \\ & + \cdots + c_n \cos\left[n\omega_c t + nk_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha\right] \end{aligned}$$

Método Indireto de Armstrong

- Um multiplicador de ordem n terá o seu espectro em $\omega_c, 2\omega_c, \cdots, n\omega_c$ com desvio em frequência de $\Delta f, 2\Delta f, \cdots, n\Delta f$
- O método indireto de Armstrong consiste em gerar um sinal FM de banda estreita (NBFM) e depois aumentar a sua frequência e o seu desvio em frequência



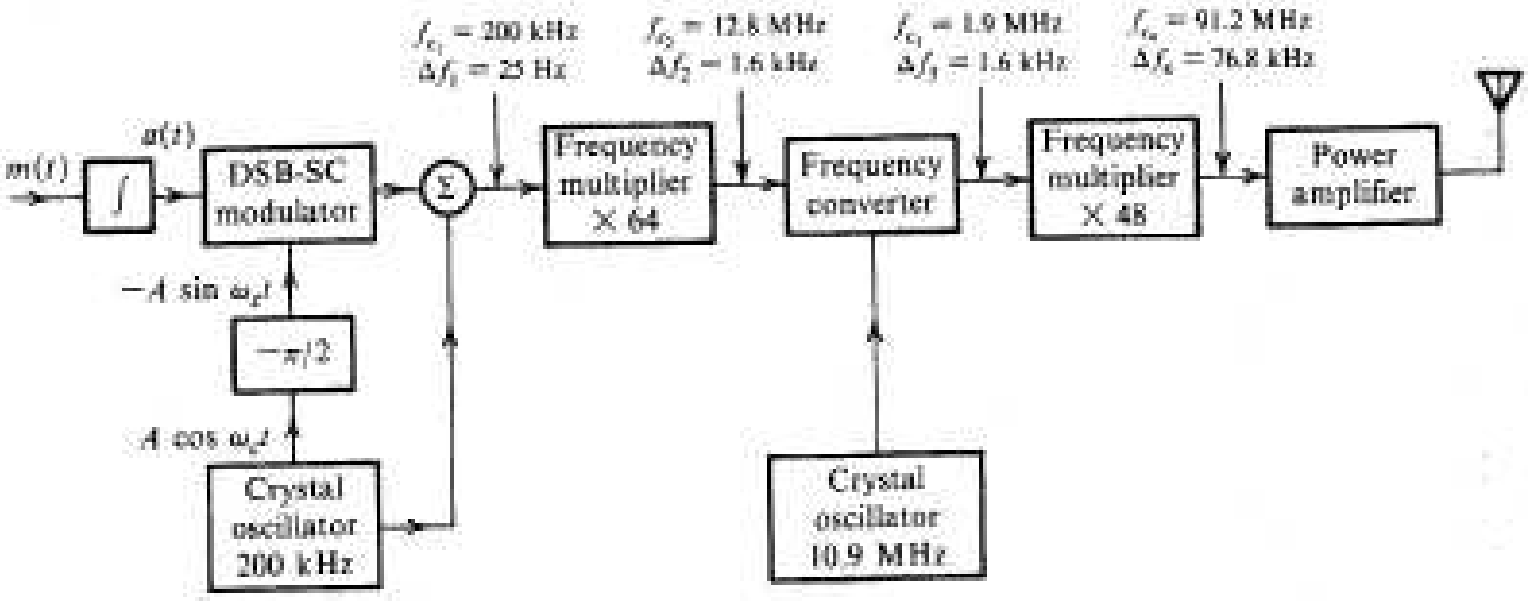
Método Indireto de Armstrong

- Para gerar um sinal FM com frequência da portadora de $91,2MHz$ e $\Delta f = 75kHz$ são realizados os seguintes passos:
  - Gera-se um sinal NBFM com $f_{c_1} = 200kHz$
  - Para garantir que $|k_f a(t)| \ll 1$ (condição para NBFM) é necessário que $\beta \ll 1$
  - Escolhe-se então $\Delta f_1 = 25Hz$, pois como em geral para sinais de áudio $50Hz < B < 15kHz$, tem-se que $0,5 < \beta < 0,0017$
  - Para se obter um Δf final de $75kHz$, é necessário um fator multiplicativo de no mínimo 3000
  - Isto é feito em dois estágios, multiplicações por 64 e 48 ($64 \times 48 = 3072$), resultando em $\Delta f = 76,8kHz$

Método Indireto de Armstrong

- Na saída do primeiro estágio,
  $f_{c_2} = 64 \times 200kHz = 12,8MHz$ e
  $\Delta f_2 = 64 \times 25Hz = 1,6kHz$
- Antes do segundo estágio, é necessário baixar a frequência da portadora através de um misturador
  - $f_{mix} = f_c - f_l = 12,8MHz - 1,9MHz = 10,9MHz$ é escolhida como frequência do oscilador local
- Assim, na saída do misturador, tem-se $f_{c_3} = 1,9MHz$ e $\Delta f_3 = 1,6kHz$
- Na saída do segundo estágio, tem-se
  $f_{c_4} = 48 \times 1,9MHz = 91,2MHz$ e
  $\Delta f_4 = 48 \times 1,6kHz = 76,8kHz$

Método Indireto de Armstrong



Geração Direta

- A geração direta pode ser feita a partir de um VCO (Voltage-controlled oscillator)
- O sinal FM é obtido usando-se o sinal modulante $m(t)$ como sinal de controle

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t)$$

- Um VCO pode ser construído a partir de amplificadores operacionais ou de simples circuitos LC
  - Varia-se os parâmetros L ou C de um circuito ressonante
  - Osciladores de Hartley ou Colpitt (capacitor variável)

Geração Direta

- A frequência de oscilação é dada por:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- A capacitância é variada da seguinte maneira:

$$C = C_0 - km(t)$$

Geração Direta

- Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \omega_o &= \frac{1}{\sqrt{LC_0[1-\frac{km(t)}{C_0}]}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}[1-\frac{km(t)}{C_0}]^{1/2}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{LC_0}}[1+\frac{km(t)}{2C_0}], \quad \frac{km(t)}{C_0} \ll 1 \end{aligned}$$

- Definindo-se:

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}, \quad k_f = \frac{k\omega_c}{2C_0}$$

- Tem-se:

$$\omega_0 = \omega_c + k_f m(t)$$

Geração Direta

- Sendo $C = C_0 - km(t)$, o desvio máximo de capacitância é dado por:

$$\Delta C = C_0 - C = km_p = \frac{2k_f C_0 m_p}{\omega_c}$$

- Portanto:

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{2k_f m_p}{\omega_c} = \frac{2k_f m_p}{2\pi f_c} = \frac{2\Delta f}{f_c}$$

- Assim, uma variação na capacitância resulta em uma variação no desvio em frequência
- O problema da geração direta é a estabilidade em frequência
  - Necessário um circuito com realimentação

Demodulação de FM

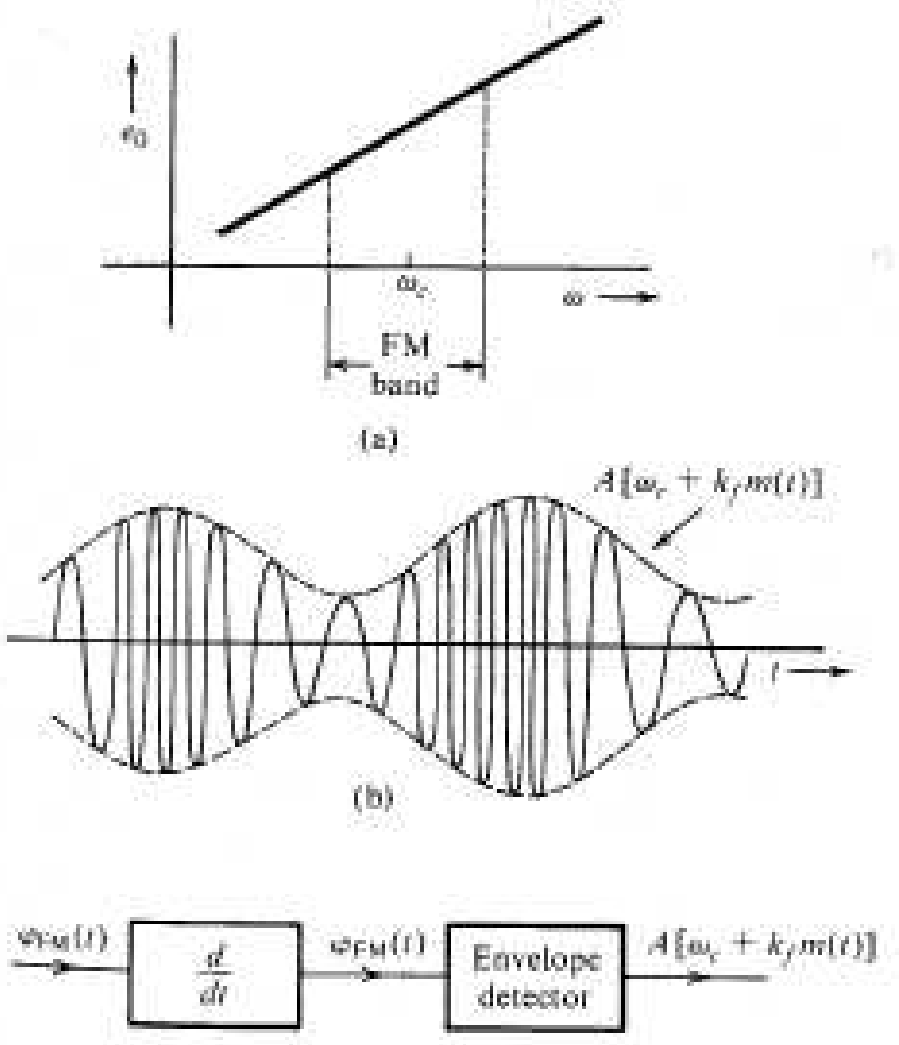
- No FM, a informação está na frequência instantânea $\omega_i = \omega_c + k_f m(t)$
- Para obter a informação, pode-se passar o sinal por um filtro cuja amplitude é proporcional à frequência

$$|H(\omega)| = a\omega + b$$

- Um diferenciador ideal é um desses filtros $|H(\omega)| = \omega$
- Se o sinal $\varphi_{FM}(t)$ passa por um diferenciador ideal, então:

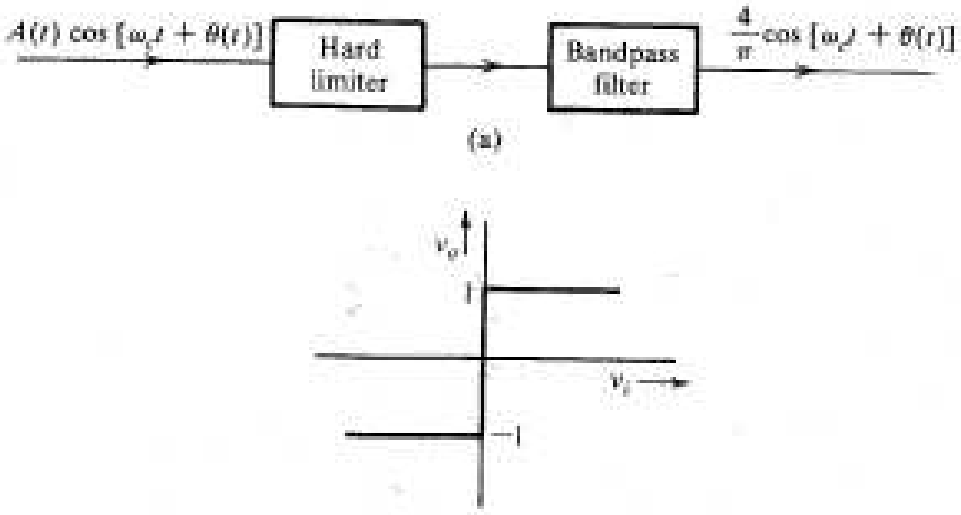
$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{FM}(t) &= \frac{d}{dt}\{A\cos[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha)d\alpha]\} \\ &= A[\omega_c + k_f m(t)]\sin[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha)d\alpha] \end{aligned}$$

Demodulação de FM



Demodulação de FM

- A amplitude da portadora deve ser constante, pois caso contrário, surge o termo $\dot{A}(t)$
- Devido aos efeitos do canal, A apresenta variações de amplitude
- Uma alternativa para manter A constante é usar o limitador passa-faixas (*bandpass limiter*)



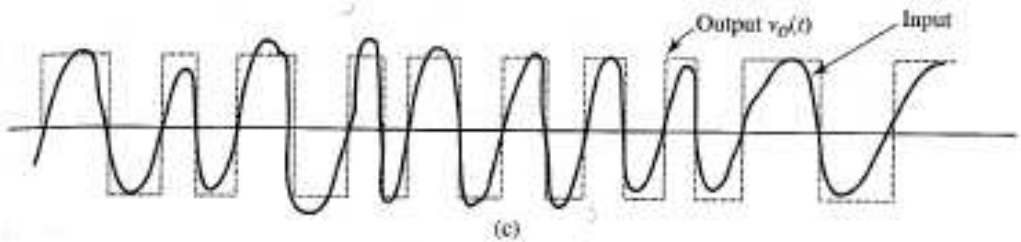
Demodulação de FM

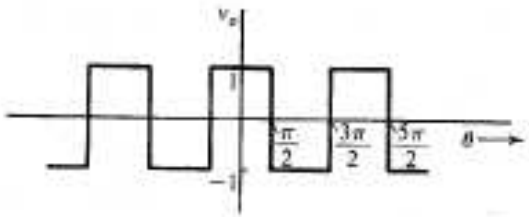
- Se a entrada é dada por:

$$v_i(t) = A(t)\cos\theta(t), \quad \theta(t) = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha)d\alpha$$

- Então a saída do limitador é dada por:

$$v_o(\theta) = \left\{ \begin{array}{c} 1, \ \cos\theta > 0 \\ -1, \ \cos\theta < 0 \end{array} \right\}$$





Demodulação de FM

- Assim, $v_o(\theta)$ é uma função com período 2π que pode ser expressada como:

$$v_o(\theta) = \frac{4}{\pi}\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta + \cdots\right)$$

- Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} v_o[\theta(t)] &= v_o[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha] \\ &= \frac{4}{\pi}\Big\{\cos[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha] \\ &\quad -\frac{1}{3}\cos 3[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha] + \cdots\Big\} \end{aligned}$$

Demodulação de FM

- Passando o sinal $v_o[\theta(t)]$ por um filtro passa-faixas em ω_c, tem-se como saída o sinal:

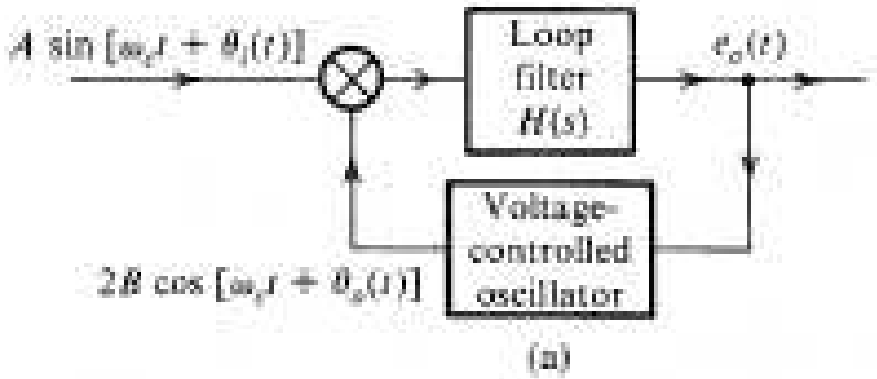
$$e_o(t) = \frac{4}{\pi}\cos\left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha)d\alpha\right]$$

- Este sinal agora tem amplitude constante e pode ser demodulado usando-se um diferenciador seguido de um detector de envelope

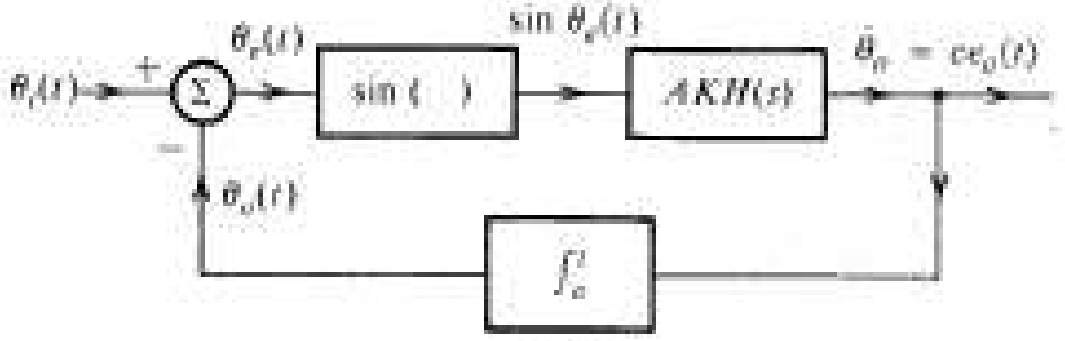
Demoduladores Práticos

- Na prática, os circuitos demoduladores de FM recebem vários nomes:
  - Discriminador balanceado (*balanced discriminator*)
  - Detector de relação (*ratio detector*)
  - Detectores de cruzamento nulo (*zero-crossing detectors*)
- Na modulação AM, foi mostrado que os circuitos do tipo PLL podem ser usados para rastrear a frequência e fase de uma portadora
- Em FM, esses circuitos podem ser usados para fazer a demodulação

PLL


A sin [ω_c t + θ_i(t)]
Loop filter H(s)
e_o(t)
Voltage-controlled oscillator
2B cos [ω_c t + θ_o(t)]

(a)


θ_i(t)
θ_e(t)
sin θ_e(t)
sin ( )
AKH(s)
θ̇_o = ce_o(t)
θ_o(t)
∫_0^t

(b)

PLL

- A frequência instantânea do VCO é dada por:

$$\omega_{VCO} = \omega_c + ce_o(t)$$

- Se a saída do VCO é dada por $B\cos[\omega_c t + \theta_o(t)]$, então sua frequência instantânea é $\omega_c + \dot{\theta}_o(t)$, portanto:

$$\dot{\theta}_o(t) = ce_o(t)$$

- Como $H(s)$ é um filtro passa-baixas, a saída efetiva do filtro é dada por:

$$\begin{aligned} e_o(t) &= h(t) * \frac{1}{2}AB\sin[\theta_i(t) - \theta_o(t)] \\ &= \frac{1}{2}AB\int_0^t h(t-\tau)\sin[\theta_i(\tau) - \theta_o(\tau)]d\tau \end{aligned}$$

PLL

- Assim, tem-se:

$$\dot{\theta}_o(t) = AK \int_0^t h(t-\tau) \sin \theta_e(\tau) d\tau$$

- Quando o sinal de entrada é do tipo FM, ou seja, $\theta_i(t)$ é da forma:

$$\theta_i(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$$

- Então,

$$\theta_o(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha - \theta_e$$

- E assim, quando o erro é pequeno, tem-se:

$$e_o(t) = \frac{1}{c}\dot{\theta}_o(t) \simeq \frac{k_f}{c} m(t)$$

Interferência em Sistemas Modulados em Ângulo

- A fim de analisar a interferência em sistemas modulados em ângulo, considera-se inicialmente um caso simples:
  - A interferência de uma portadora não modulada $A\cos\omega_c t$ com uma outra senóide $I\cos(\omega_c+\omega)t$
  - Seja $r(t)$ o sinal recebido, então:

$$\begin{aligned} r(t) &= A\cos\omega_c t + I\cos(\omega_c+\omega)t \\ &= (A+I\cos\omega t)\cos\omega_c t - I\sin\omega t\sin\omega_c t \\ &= E_r(t)\cos[\omega_c t+\psi_d(t)] \end{aligned}$$

  - Em que

$$\psi_d(t) = \arctan\frac{I\sin\omega t}{A+I\cos\omega t} \approx \frac{I}{A}\sin\omega t, \quad (I \ll A)$$

Interferência em Sistemas Modulados em Ângulo

- Se esse sinal passa por um demodulador, tem-se:

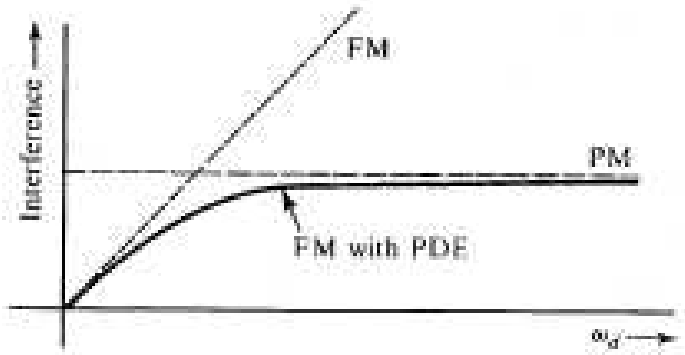
$$y_d(t) = \frac{I}{A}\sin\omega t \quad (PM)$$

$$y_d(t) = \frac{I\omega}{A}\cos\omega t \quad (FM)$$

- Observa-se que:
  - A interferência é inversamente proporcional à amplitude da portadora
  - Os sistemas modulados em ângulo suprimem sinais de interferência fracos
  - Surge o efeito de captura: a portadora mais forte suprime a portadora mais fraca se elas são próximas

Interferência em Sistemas Modulados em Ângulo

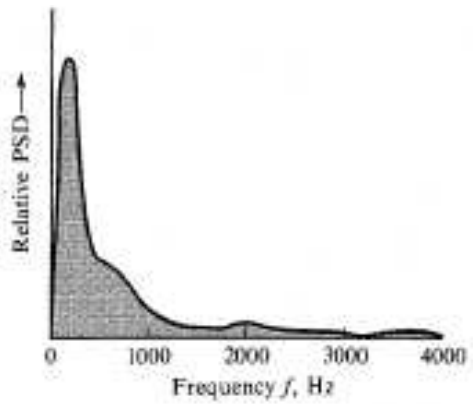
- Amplitude da interferência versus a frequência na saída do receptor



- Quando a interferência é devida ao ruído branco, o modelo acima ainda se aplica, ou seja, a amplitude da interferência é constante para PM e varia linearmente com ω para FM

Pré-ênfase e De-ênfase em FM

- Na figura anterior, observa-se que a interferência aumenta com a frequência em FM
- Dessa forma, a potência do ruído está concentrada nas altas frequências
- Como em um sinal de áudio predominam as baixas frequências, o ruído ataca principalmente onde o sinal é fraco

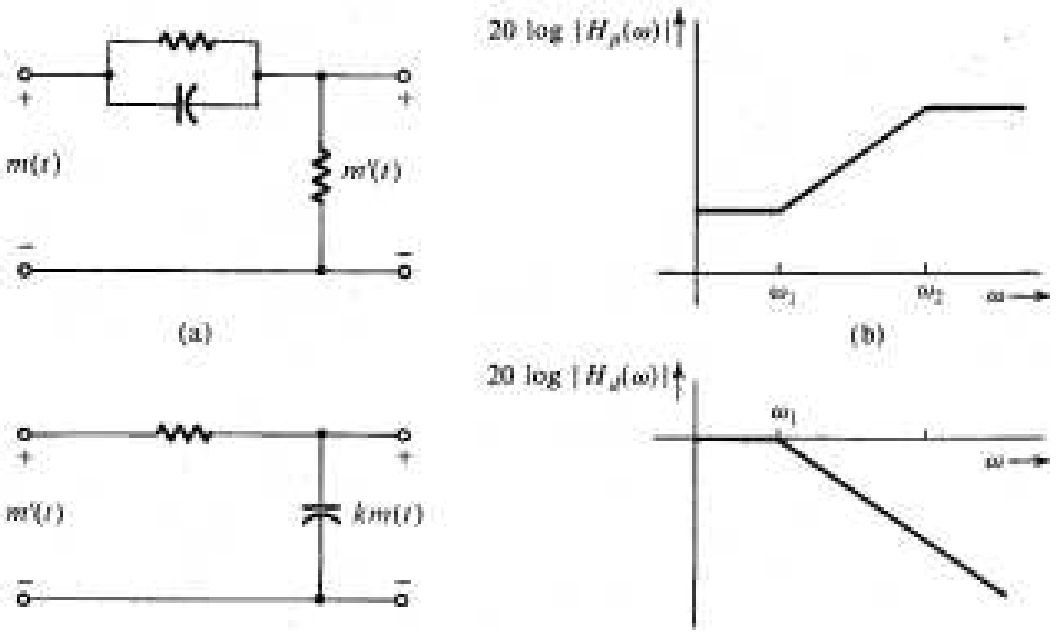


Pré-ênfase e De-ênfase em FM

- A solução para esse problema consiste em dar um ganho nas componentes de alta frequência antes da modulação (acima de 2,1kHz)
- Este processo é realizado utilizando um filtro $H_p(j\omega)$ e é chamado de pré-ênfase
- No receptor, depois da demodulação é feito o processo inverso chamado de de-ênfase com o filtro $H_d(j\omega)$

Pré-ênfase e De-ênfase em FM

- A idéia é fazer o sistema se comportar como FM em baixas frequências e como PM em altas frequências
- A pré-ênfase e a de-ênfase podem ser realizadas com circuitos RC



Pré-ênfase e De-ênfase em FM

- A função de transferência $H_p(\omega)$ é dada por:

$$H_p(\omega) = K\frac{j\omega + \omega_1}{j\omega + \omega_2}$$

- Se o ganho K for escolhido como $K = \omega_2/\omega_1$, então:

$$H_p(\omega) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\frac{j\omega + \omega_1}{j\omega + \omega_2} \simeq \left\{ \begin{array}{cc} 1, & \omega \ll \omega_1 \\ \frac{j\omega}{\omega_1}, & \omega_1 \ll \omega \ll \omega_2 \end{array} \right\}$$

- Em que $f_1 = 2,1kHz$ e $f_2 = 15kHz$

Pré-ênfase e De-ênfase em FM

- O filtro de de-ênfase $H_d(\omega)$ é dado por:

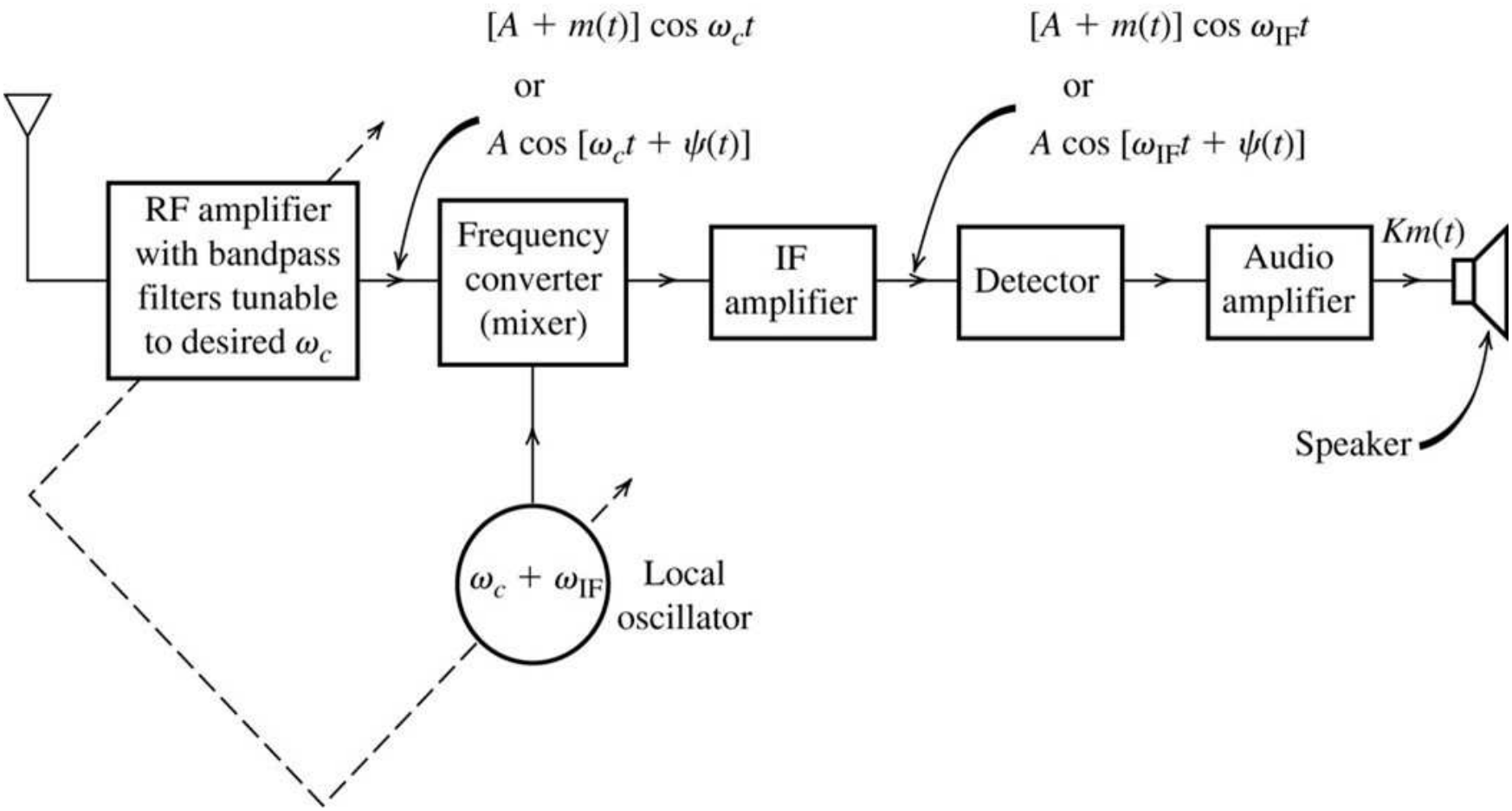
$$H_d(\omega) = \frac{\omega_1}{j\omega + \omega_1}$$

- Sistemas similares de redução de ruído são empregados nas gravações de fitas cassetes e na gravação de LPs

Receptor FM

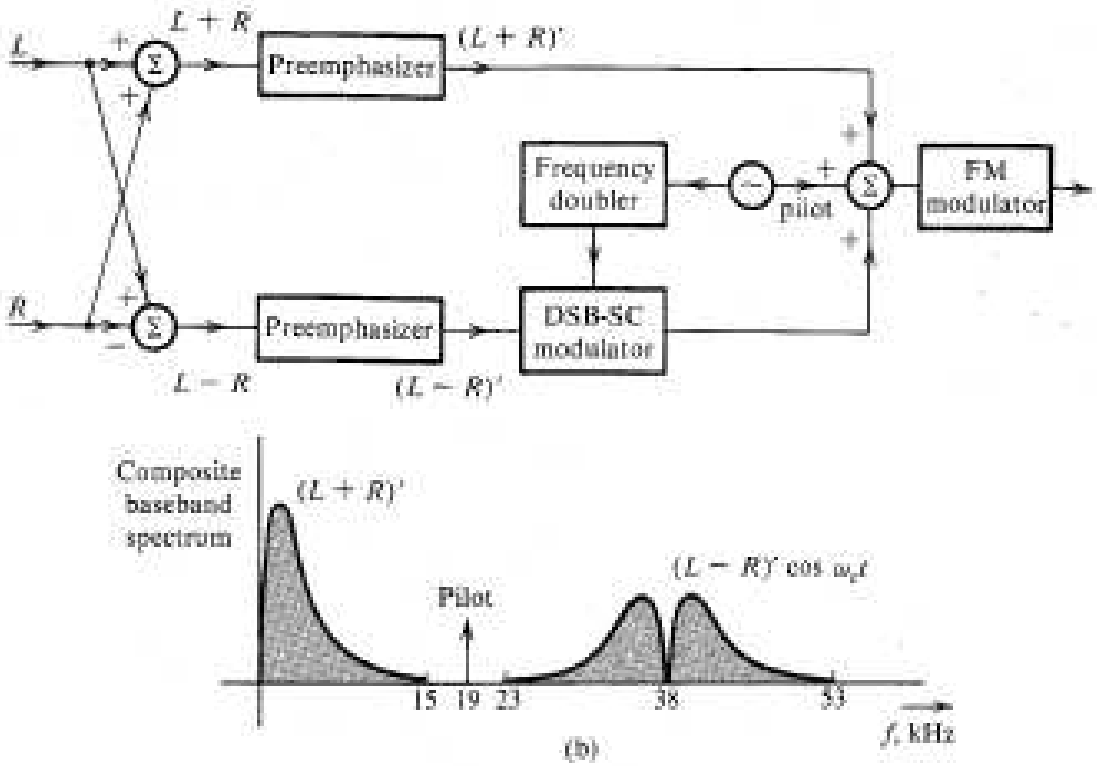
- A faixa de frequências atribuída ao FM varia de 88 a 108 MHz para difusão
- A separação entre estações adjacentes é de 200kHz e o desvio de frequência de pico Δf é igual a 75kHz
- Os receptores mono para FM são semelhantes ao receptor super-heteródino para AM
  - A frequência intermediária f_I é de $10,7MHz$
  - O detector de envelope é substituído por um PLL ou por um discriminador (diferenciador) mais circuito de deênfase

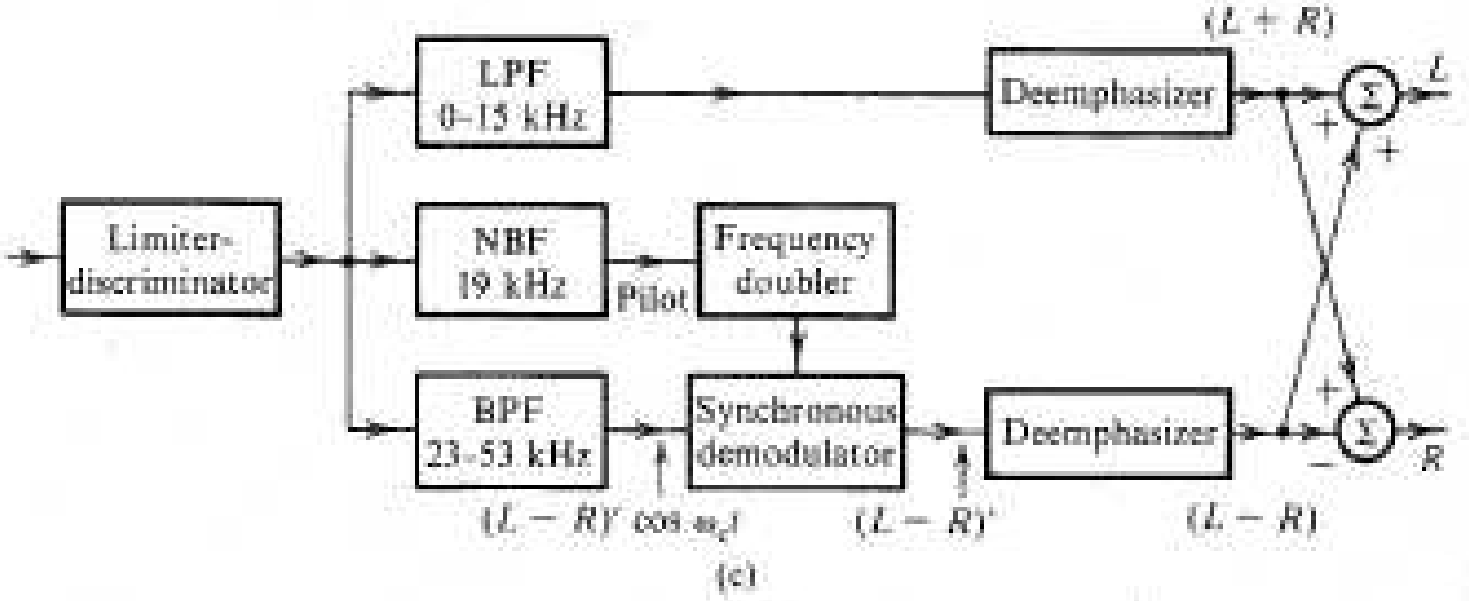
Receptor Super-Heteródino



Transmissor FM Estéreo

- Na transmissão estéreo, o transmissor e o receptor precisam lidar com dois sinais *L* e *R*



Receptor Estéreo

- Se o receptor for mono, ele recebe o sinal $L + R$