

Sistemas Analógicos na Presença do Ruído

Edmar J Nascimento

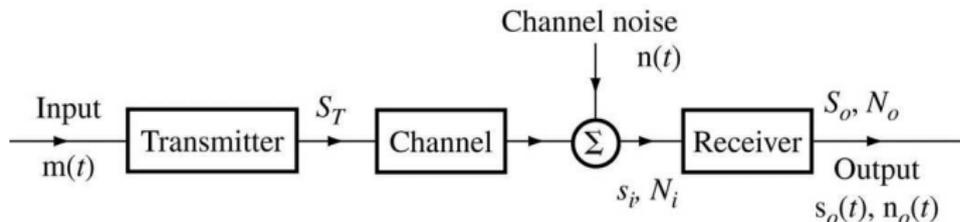
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

November 15, 2020

Modelo de um Sistema Analógico

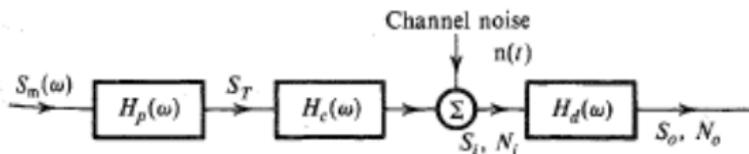
- Um modelo de um sistema de comunicação analógico:



- O canal causa distorção e atenuação, além da adição de ruído
- A potência na entrada do receptor S_i é proporcional à potência transmitida S_T
- A SNR na saída do receptor S_o/N_o é uma medida do desempenho do sistema de comunicação

Sistemas em Banda Base

- É de interesse comparar a SNR na saída do receptor para os sistemas modulados com portadora tendo como referência um sistema em banda base
- Um modelo de sistema em banda base:



- O sinal de entrada $m(t)$ é representado por um processo aleatório ESA com média nula e banda igual a B Hz
- O transmissor é apenas um filtro passa-baixas $H_p(\omega)$
- O receptor é apenas um filtro passa-baixas $H_d(\omega)$ cujo objetivo é eliminar o ruído fora da banda do sinal
- $H_c(\omega)$ representa a distorção do canal

Sistemas em Banda Base

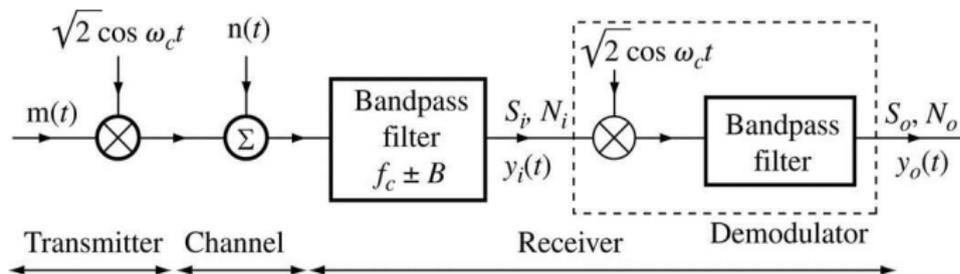
- Considerando $H_p(\omega)$ e $H_d(\omega)$ ideais e um canal $H_c(\omega) = 1$
- Como o sinal $m(t)$ é limitado em banda, pode-se utilizar o modelo de ruído branco passa-baixas com DEP $S_n(\omega) = \mathcal{N}/2$, logo:

$$\begin{aligned}S_o &= S_i \\N_o &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S_n(\omega) d\omega = \mathcal{N}B \\ \frac{S_o}{N_o} &= \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \gamma\end{aligned}$$

- Em que γ foi assim definido para efeito de comparação

AM DSB-SC

- Um modelo para um sistema DSB-SC:



- S_i representa a potência útil do sinal na entrada do demodulador e S_o na saída
- N_o representa a potência do ruído na saída do demodulador

- Na entrada do demodulador, o sinal $y_i(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}y_i(t) &= \sqrt{2}m(t) \cos \omega_c t + n(t) \\ &= \sqrt{2}m(t) \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t \\ &= [\sqrt{2}m(t) + n_c(t)] \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t\end{aligned}$$

- $y_o(t)$ representa o sinal demodulado e é dado por

$$\begin{aligned}[\sqrt{2} \cos \omega_c t]y_i(t) &= [2m(t) + \sqrt{2}n_c(t)] \cos^2 \omega_c t + \sqrt{2}n_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t \\ &= \left[m(t) + \frac{n_c(t)}{\sqrt{2}}\right](1 + \cos 2\omega_c t) + \frac{n_s(t)}{\sqrt{2}} \sin 2\omega_c t \\ y_o(t) &= m(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}n_c(t)\end{aligned}$$

AM DSB-SC

- As potências são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_i &= \overline{\varphi_{AM-DSB-SC}^2(t)} = \overline{[\sqrt{2}m(t) \cos \omega_c t]^2} \\ &= 2 \overline{[m(t) \cos \omega_c t]^2} = 2 \frac{\overline{m^2(t)}}{2} = \overline{m^2(t)} \end{aligned}$$

$$S_o = \overline{m^2(t)} = S_i, \quad N_o = \frac{1}{2} \overline{n_c^2(t)}$$

- Para o ruído branco passa-faixa na banda $4\pi B$ rad/s, tem-se que:

$$\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = 2\mathcal{N}B \implies N_o = \mathcal{N}B$$

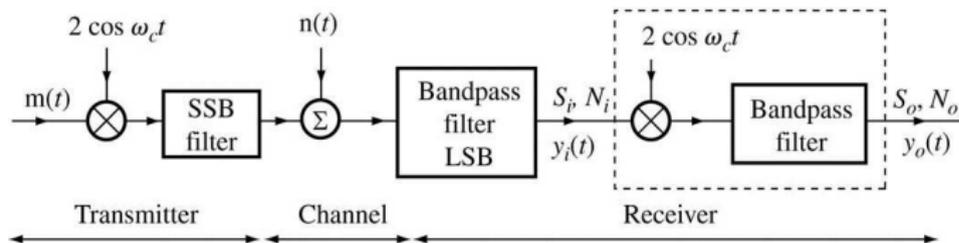
- Assim, a SNR na saída do demodulador é dada por:

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \gamma$$

- Ou seja, para uma potência S_i fixada, a SNR na saída para sistemas AM-DSB-SC é igual à SNR para o sistema em banda base

AM SSB-SC

- De modo similar, um sistema SSB-SC pode ser representado pelo modelo:



- Um sinal SSB-SC pode ser representado no domínio do tempo por:

$$\varphi_{BLI}(t) = m(t) \cos \omega_c t + m_h(t) \sin \omega_c t$$

$$\varphi_{BLS}(t) = m(t) \cos \omega_c t - m_h(t) \sin \omega_c t$$

AM SSB-SC

- Na entrada do demodulador, considerando-se a Banda Lateral Inferior, o sinal $y_i(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}y_i(t) &= \varphi_{BLI}(t) + n(t) \\ &= [m(t) + n_c(t)] \cos \omega_c t + [m_h(t) + n_s(t)] \sin \omega_c t\end{aligned}$$

- Na demodulação, o sinal $y_i(t)$ é multiplicado por $2 \cos \omega_c t$ e depois é filtrado (passa-baixas), resultando no sinal $y_o(t)$

$$\begin{aligned}[2 \cos \omega_c t] y_i(t) &= 2[m(t) + n_c(t)] \cos^2 \omega_c t \\ &+ 2[m_h(t) + n_s(t)] \sin \omega_c t \cos \omega_c t \\ &= [m(t) + n_c(t)](1 + \cos 2\omega_c t) \\ &+ [m_h(t) + n_s(t)] \sin 2\omega_c t \\ y_o(t) &= m(t) + n_c(t)\end{aligned}$$

- As potências são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{2} \overline{[2m(t) \cos \omega_c t]^2} \\ &= 2 \overline{[m(t) \cos \omega_c t]^2} = 2 \frac{\overline{m^2(t)}}{2} = \overline{m^2(t)} \\ S_o &= \overline{m^2(t)} = S_i, \quad N_o = \overline{n_c^2(t)} \end{aligned}$$

- Para o ruído branco passa-faixa na banda $2\pi B$ rad/s, tem-se que:

$$\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = \mathcal{N}B \implies N_o = \mathcal{N}B$$

- Assim, a SNR na saída do demodulador é dada por:

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \gamma$$

- Ou seja, para uma potência S_i fixada, a SNR na saída para sistemas AM-SSB-SC é igual à SNR para os sistemas em banda base e AM-DSB-SC

AM Tradicional

- Na modulação AM tradicional (com portadora), o sinal recebido pode ser demodulado de duas formas:
 - Demodulação síncrona ou coerente
 - Demodulação não coerente (detecção de envelope)
- A análise da demodulação síncrona pode ser feita de modo idêntico à feita para a modulação AM-DSB-SC
- Na entrada do demodulador, o sinal $y_i(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}y_i(t) &= \sqrt{2}[A + m(t)] \cos \omega_c t + n(t) \\ &= \sqrt{2}\left[A + m(t) + \frac{n_c(t)}{\sqrt{2}}\right] \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t\end{aligned}$$

AM Tradicional com Demodulação Síncrona

- Na demodulação, o sinal $y_o(t)$ é dado por:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cos \omega_c t y_i(t) &= 2\left[A + m(t) + \frac{n_c(t)}{\sqrt{2}}\right] \cos^2 \omega_c t + \sqrt{2} n_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t \\ &= \left[A + m(t) + \frac{n_c(t)}{\sqrt{2}}\right] (1 + \cos 2\omega_c t) + \frac{n_s(t)}{\sqrt{2}} \sin 2\omega_c t \\ y_o(t) &= m(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} n_c(t)\end{aligned}$$

- As potências são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}S_i &= \overline{[\sqrt{2}(A + m(t)) \cos \omega_c t]^2} \\ &= 2 \frac{1}{2} \overline{[A + m(t)]^2} = \overline{A^2 + 2Am(t) + m^2(t)} \\ &= A^2 + 2\overline{Am(t)} + \overline{m^2(t)} = A^2 + \overline{m^2(t)} \\ S_o &= \overline{m^2(t)}, \quad N_o = \frac{1}{2} \overline{n_c^2(t)}\end{aligned}$$

AM Tradicional com Demodulação Síncrona

- Para o ruído branco passa-faixa na banda $4\pi B$ rad/s, tem-se que:

$$\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = 2\mathcal{N}B \implies N_o = \mathcal{N}B$$

- Assim, a SNR na saída do demodulador é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{S_o}{N_o} &= \frac{\overline{m^2(t)}}{\mathcal{N}B} = \frac{\overline{m^2(t)}}{\mathcal{N}B} \cdot \frac{S_i}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \\ &= \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \gamma \\ \mu &= \frac{m_p}{A}; 0 \leq \mu \leq 1 \implies A \geq m_p \end{aligned}$$

- A SNR máxima é obtida para $\mu = 1$ ou seja, $A = m_p$

AM Tradicional com Demodulação Síncrona

- Assim, a SNR na saída do demodulador é dada por:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{MAX} = \frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2 + \overline{m^2(t)}} \gamma$$

- Como

$$\frac{m_p^2}{\overline{m^2(t)}} \geq 1$$

- Então

$$\frac{S_o}{N_o} \leq \frac{\gamma}{2}$$

- Ou seja, a SNR do AM tradicional é no mínimo 3dB inferior ao AM-DSB-SC

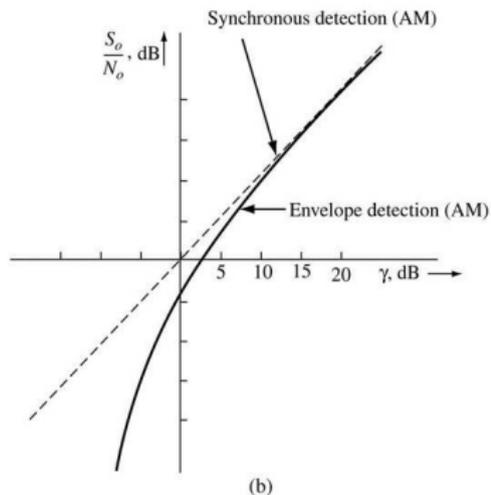
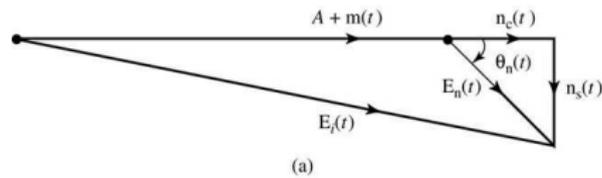
AM Tradicional com Detecção de Envelope

- Quando o ruído é pequeno, ou seja $[A + m(t)] \gg n(t)$, a SNR é a mesma da demodulação síncrona
- Quando o ruído é elevado, $n(t) \gg [A + m(t)]$, a informação é completamente perdida, pois o sinal $m(t)$ é multiplicado pelo ruído
- Nos casos intermediários, a SNR é dada por

$$\frac{S_o}{N_o} \simeq 0,916A^2 \overline{m^2(t)} \gamma^2$$

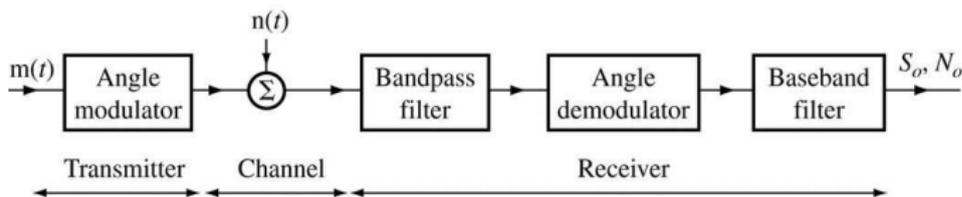
- O limiar da transição entre essas regiões ocorre quando γ é da ordem de $10dB$
- Para um sinal AM de boa qualidade, γ é da ordem de $30dB$

AM Tradicional com Detecção de Envelope



Modulação em Ângulo

- Um modelo para um sistema modulado em ângulo



- O sinal modulado $\varphi_{EM}(t)$ pode ser representado por:

$$\varphi_{EM}(t) = A \cos[\omega_c t + \psi(t)]$$
$$\psi(t) = \left\{ \begin{array}{ll} k_p m(t), & \text{PM} \\ k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha, & \text{FM} \end{array} \right\}$$

Modulação em Ângulo

- Como $B_{EM} = 2(\Delta f + B)$, com

$$\Delta f = \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_p m'_p}{2\pi}, \text{ PM} \\ \frac{k_f m_p}{2\pi}, \text{ FM} \end{array} \right\}$$

- O ruído $n(t)$ pode ser modelado como um processo aleatório passa-faixa com largura de banda $2(\Delta f + B)$, assim:

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t = E_n(t) \cos [\omega_c t + \Theta_n(t)]$$

- Em que $n_c(t)$ e $n_s(t)$ são processos passa-baixas com largura de banda $\Delta f + B$
- Como a modulação em ângulo é não linear, o princípio da superposição não pode ser aplicado para o cálculo da SNR na saída

Modulação em Fase

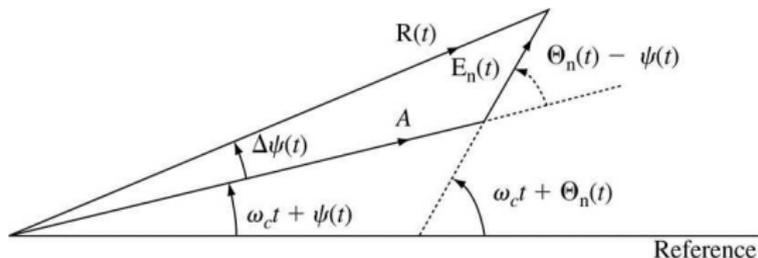
- Na modulação em fase, $\psi(t) = k_p m(t)$
- Como a modulação em banda estreita (NBPM) é aproximadamente linear, considera-se apenas nessa análise a modulação em banda larga (WBPM)
 - $\Delta f \gg B$
- Em WBPM, o sinal muda muito lentamente em relação ao ruído
 - $2(\Delta f + B)$ é a banda do ruído
 - $2B$ é a banda do sinal

Modulação em Fase

- O sinal $y_i(t)$ na estrada do demodulador é dado por:

$$\begin{aligned}y_i(t) &= A \cos [\omega_c t + \psi(t)] + n(t) \\ &= A \cos [\omega_c t + \psi(t)] + E_n(t) \cos [\omega_c t + \Theta_n(t)] \\ &= R(t) \cos [\omega_c t + \psi(t) + \Delta\psi(t)]\end{aligned}$$

- O diagrama fasorial correspondente é mostrado abaixo



Modulação em Fase

- Quando o ruído é pequeno, $E_n(t) \ll A$ para quase todo t , então:

$$\Delta\psi(t) = \frac{s}{r} \simeq \frac{E_n(t) \sin [\Theta_n(t) - \psi(t)]}{A}$$

- O demodulador detecta a fase de $y_i(t)$, assim:

$$y_o(t) = \psi(t) + \Delta\psi(t) = k_p m(t) + \frac{E_n(t)}{A} \sin [\Theta_n(t) - \psi(t)]$$

- Como $\psi(t)$ varia mais lentamente que $\Theta_n(t)$, pois $B \ll 2(\Delta f + B)$, então $\psi(t) \sim \psi = \text{constante}$

Modulação em Fase

$$\begin{aligned}\Delta\psi(t) &\simeq \frac{E_n(t)}{A} \sin [\Theta_n(t) - \psi] \\ &= \frac{E_n(t)}{A} \sin \Theta_n(t) \cos \psi - \frac{E_n(t)}{A} \cos \Theta_n(t) \sin \psi \\ &= \frac{n_s(t)}{A} \cos \psi - \frac{n_c(t)}{A} \sin \psi\end{aligned}$$

- Para $n(t)$ branco, $n_c(t)$ e $n_s(t)$ são ortogonais, logo:

$$\begin{aligned}S_{\Delta\psi}(\omega) &= \frac{\cos^2 \psi}{A^2} S_{n_s}(\omega) + \frac{\sin^2 \psi}{A^2} S_{n_c}(\omega) = \frac{S_{n_s}(\omega)}{A^2} = \frac{S_{n_c}(\omega)}{A^2} \\ S_{\Delta\psi}(\omega) &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{N}{A^2}, \quad -2\pi(\Delta f + B) \leq \omega \leq 2\pi(\Delta f + B) \\ 0, \quad \text{c.c} \end{array} \right\}\end{aligned}$$

Modulação em Fase

- Após a passagem do sinal de saída do modulador pelo filtro passa-baixas, o ruído na saída se concentra apenas na banda B , logo:

$$S_{n_o}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathcal{N}}{A^2}, \quad -2\pi B \leq \omega \leq 2\pi B \\ 0, \quad \text{c.c} \end{array} \right\}$$

- Finalmente, a SNR na saída é calculada como:

$$\begin{aligned} N_o &= \frac{2\mathcal{N}B}{A^2} \\ S_o &= \overline{\psi^2(t)} = \overline{k_p^2 m^2(t)} = k_p^2 \overline{m^2(t)} \\ \frac{S_o}{N_o} &= \frac{k_p^2 \overline{m^2(t)} A^2}{2\mathcal{N}B} = k_p^2 A^2 \frac{\overline{m^2(t)}}{2\mathcal{N}B} \end{aligned}$$

Modulação em Fase

- A relação da SNR com a potência de entrada é obtida a seguir:

$$S_i = \overline{[A \cos[\omega_c t + \psi(t)]]^2} = \frac{A^2}{2}$$

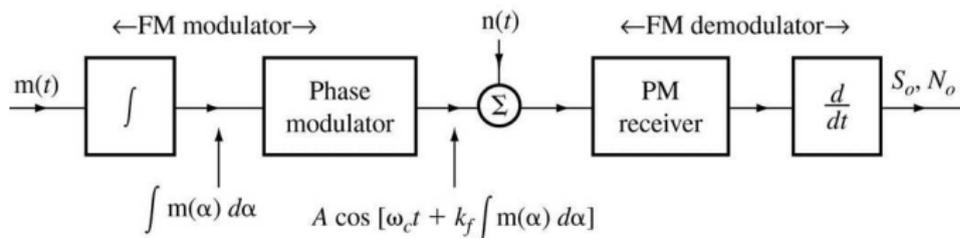
$$\gamma = \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \frac{A^2}{2\mathcal{N}B}$$

$$\frac{S_o}{N_o} = k_p^2 \overline{m^2(t)} \gamma = (\Delta\omega)^2 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{(m'_p)^2} \right) \gamma$$

- Pode-se observar que a SNR aumenta em 6dB quando dobra-se a banda do sinal PM, $\Delta\omega$

Modulação em Frequência

- Caso especial da modulação em fase quando o sinal modulante é $\int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$
- Considera-se nessa análise o caso do FM banda larga (WBFM), $\Delta f \gg B$
- Quando o ruído é pequeno, a demodulação pode ser feita utilizando-se o receptor PM utilizado anteriormente seguido de um diferenciador resultando na saída $k_f m(t)$, logo $S_o = k_f^2 \overline{m^2(t)}$

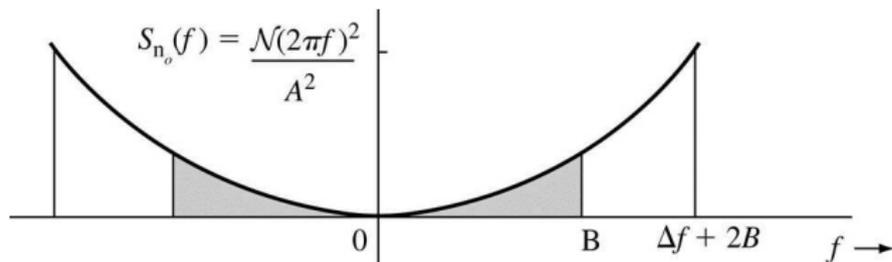


Modulação em Frequência

- A DEP e a potência do ruído na saída do diferenciador são dadas por:

$$S_{n_o}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathcal{N}}{A^2}\omega^2, \quad -2\pi B \leq \omega \leq 2\pi B \\ 0, \quad \text{c.c} \end{array} \right\}$$

$$N_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{\mathcal{N}}{A^2}\omega^2 d\omega = \frac{8\pi^2 \mathcal{N} B^3}{3A^2}$$



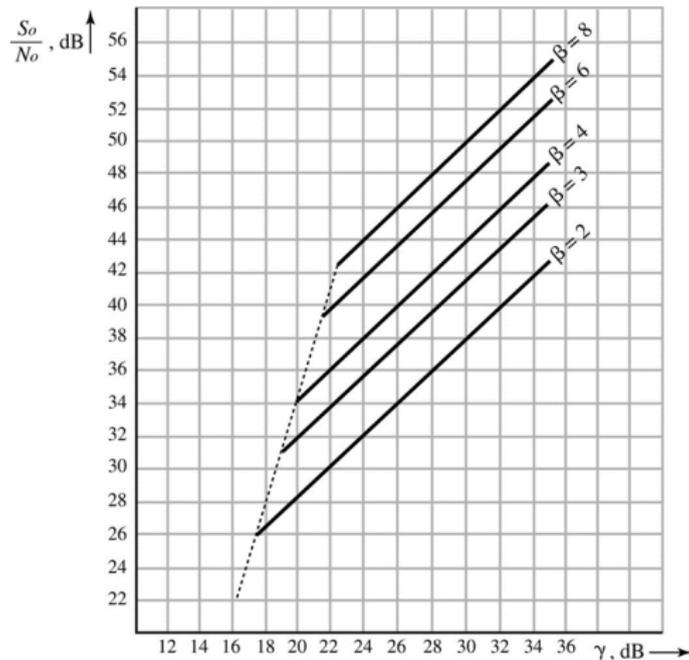
Modulação em Frequência

- Finalmente, a SNR na saída é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{S_o}{N_o} &= \frac{3A^2 k_f^2 \overline{m^2(t)}}{8\pi^2 \mathcal{N} B^3} = \frac{3k_f^2 \overline{m^2(t)}}{(2\pi B)^2} \frac{A^2}{2\mathcal{N} B} \\ &= 3 \left(\frac{\Delta f}{B} \right)^2 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \right) \gamma = 3\beta^2 \gamma \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \right)\end{aligned}$$

- Observa-se que ao dobrar a largura de banda, aumenta-se a SNR em 6dB

Desempenho de um Sistema FM para a Modulação de um Tom



Comparação entre FM e PM

- Para as modulações em ângulo de banda larga, foram obtidas as seguintes expressões para a SNR de saída:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{PM} = (\Delta\omega)^2 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{(m'_p)^2}\right) \gamma, \quad \left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{FM} = 3\left(\frac{\Delta f}{B}\right)^2 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2}\right) \gamma$$

- Considerando a mesma banda para ambas as modulações e o fato que $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$, então:

$$\frac{(S_o/N_o)_{PM}}{(S_o/N_o)_{FM}} = \frac{(2\pi B)^2 m_p^2}{3(m'_p)^2}$$

Comparação entre FM e PM

- A partir dessa expressão, verifica-se que PM é superior ao FM se:

$$(2\pi B)^2 m_p^2 > 3(m'_p)^2$$

- Se a DEP de $m(t)$ é concentrada em baixas frequências, as componentes de baixa frequência predominam em $m(t)$ e m'_p é pequeno
 - PM é superior nesse caso
- Se a DEP de $m(t)$ é concentrada em altas frequências, então FM é superior