Processos Aleatórios

Edmar J Nascimento

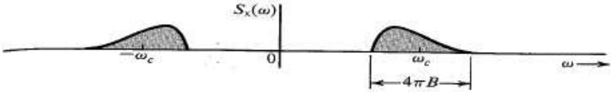
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/˜edmar.nascimento

November 9, 2020

Processos Aleatórios Passa-Faixa

- Em um processo passa-faixa, a DEP está confinada em uma certa banda passante



- Um sinal passa-faixa determinístico $g_{PF}(t)$ pode ser representado em suas componentes de fase e quadratura, ou seja:

$$
\begin{aligned}
g_{PF}(t) &= g_c(t)\cos\omega_c t + g_s(t)\sin\omega_c t \\
&= E(t)\cos\left[\omega_c t + \psi(t)\right]
\end{aligned}
$$

- Nessa expressão, $g_c(t)$ e $g_s(t)$ são sinais passa-baixas

Processos Aleatórios Passa-Faixa

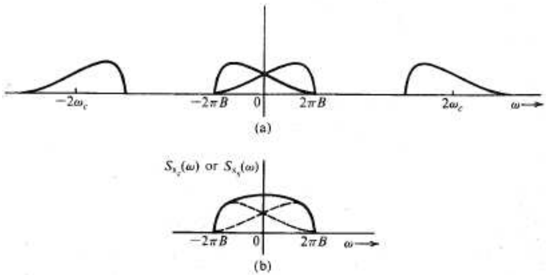
- Analogamente, um processo aleatório passa-faixa $x(t)$ também pode ser representado na forma:

$$x(t) = x_c(t)\cos\omega_c t + x_s(t)\sin\omega_c t$$

- Nessa expressão, $x_c(t)$ e $x_s(t)$ são processos aleatórios passa-baixas com DEP dada por:

$$S_{x_s}(\omega) = S_{x_c}(\omega) = \left\{ \begin{array}{cc} S_x(\omega+\omega_c) + S_x(\omega-\omega_c), & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0, & |\omega| > 2\pi B \end{array} \right\}$$

Processos Aleatórios Passa-Faixa



- Pode-se observar que as áreas das DEPs $S_x(\omega)$, $S_{x_c}(\omega)$ e $S_{x_s}(\omega)$ são iguais, assim:

$$\overline{x_c^2(t)} = \overline{x_s^2(t)} = \overline{x^2(t)}$$

Processos Aleatórios Passa-Faixa

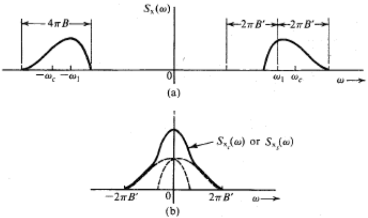
- Pode-se mostrar que:

$$\overline{x_c(t)x_s(t)} = R_{x_c x_s}(0) = 0$$

- Se $S_x(\omega)$ é simétrica em torno de ω_c e $-\omega_c$ então:

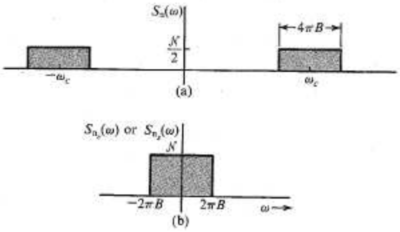
$$R_{x_c x_s}(\tau) = 0$$

- A representação em fase e quadratura não é única, pois diferentes frequências centrais geram representações diferentes



Exemplo 11.11

A DEP do ruído branco passa-faixa $n(t)$ é mostrada na figura abaixo. Represente este processo em termos das suas componentes de fase e quadratura. Obtenha as expressões de $S_{n_c}(\omega)$ e $S_{n_s}(\omega)$ e verifique que $\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)}$



Exemplo 11.11 - Solução

$$n(t) = n_c(t)\cos\omega_c t + n_s(t)\sin\omega_c t$$

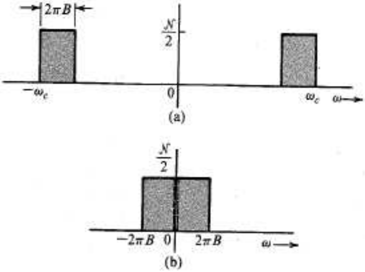
Em que:

$$\begin{aligned} S_{n_s}(\omega) &= S_{n_c}(\omega) = \left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{N}, & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0, & |\omega| > 2\pi B \end{array} \right\} \\ \overline{n_c^2(t)} &= \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = 2\mathcal{N}B \end{aligned}$$

Ruído Branco Passa-Faixa

Exemplo 11.12

A DEP do ruído branco passa-faixa $n(t)$ de um canal SSB (usando a Banda Lateral Inferior) é mostrada na figura abaixo. Represente este processo em termos das suas componentes de fase e quadratura com frequência central ω_c.



Ruído Branco Passa-Faixa

Exemplo 11.12 - Solução

$$n(t) = n_c(t)\cos\omega_c t + n_s(t)\sin\omega_c t$$

Em que:

$$\begin{aligned} S_{n_s}(\omega) &= S_{n_c}(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\mathcal{N}}{2}, & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0, & |\omega| > 2\pi B \end{array} \right\} \\ \overline{n_c^2(t)} &= \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = \mathcal{N}B \end{aligned}$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- Os processos gaussianos são de extrema importância nas telecomunicações
- Em um processo gaussiano, as variáveis aleatórias $x(t_i) = x_i$ são gaussianas
- Um processo aleatório passa-faixa gaussiano branco pode ser expressado como

$$
\begin{aligned}
n(t) &= n_c(t)\cos\omega_c t + n_s(t)\sin\omega_c t \\
S_{n_s}(\omega) &= S_{n_c}(\omega) = \left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{N}, & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0, & |\omega| > 2\pi B \end{array} \right\} \\
\overline{n_c^2(t)} &= \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = 2\mathcal{N}B
\end{aligned}
$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- Um processo aleatório passa-faixa gaussiano branco também pode ser expressado na forma polar como

$$\begin{aligned} n(t) &= E(t)\cos(\omega_c t + \Theta) \\ E(t) &= \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \\ \Theta(t) &= -\arctan\frac{n_s(t)}{n_c(t)} \end{aligned}$$

- As variáveis aleatórias $n_c(t)$ e $n_s(t)$ são variáveis gaussianas descorrelacionadas, com média nula e variância $\sigma^2 = 2\mathcal{N}B$

$$p_{n_c}(\alpha) = p_{n_s}(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- Na forma polar, a variável aleatória $E(t)$ tem uma fdp de Rayleigh e Θ é uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$

$$p_E(E) \;=\; \frac{E}{\sigma^2} e^{-\frac{E^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = 2\mathcal{N}B$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- Outro caso de interesse é o processo aleatório resultante da soma de uma senóide com o ruído passa-faixa gaussiano branco

$$y(t) = A\cos\left(\omega_c t + \varphi\right) + n(t)$$

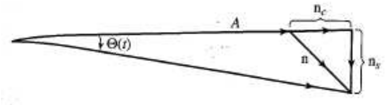
- Como $n(t)$ pode ser representado em fase e quadratura, tem-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= [A + n_c(t)]\cos\left(\omega_c t + \varphi\right) + n_s(t)\sin\left(\omega_c t + \varphi\right) \\ &= E(t)\cos\left(\omega_c t + \Theta(t) + \varphi\right) \\ E(t) &= \sqrt{[A + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)}, \Theta(t) = -\arctan\frac{n_s(t)}{A + n_c(t)} \end{aligned}$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- A partir da representação fasorial mostrada a seguir, pode-se verificar que:

$$n_c^2 + n_s^2 = E^2 - 2AE\cos\Theta(t) + A^2$$



- Substituindo na fdp de Rayleigh para $E(t)$, tem-se:

$$p_{E\Theta}(E,\theta) = \frac{E}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(E^2 - 2AE\cos\Theta(t) + A^2)}{2\sigma^2}}$$

Processos Aleatório Passa-Faixa Gaussiano Branco

- As fdps marginais são obtidas integrando-se $p_{E\Theta}(E, \theta)$ com relação a E e a Θ, resultando em:

$$
\begin{aligned}
p_E(E) &= \frac{E}{\sigma^2} e^{-\frac{(E^2+A^2)}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{AE}{\sigma^2}\right) \quad \text{(fdp de Rice)} \\
&\simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(E-A)^2}{2\sigma^2}} \quad (A \gg \sigma) \\
p_\Theta(\theta) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} \left\{1 + \frac{A}{\sigma}\sqrt{2\pi}\cos\theta e^{\frac{A^2\cos^2\theta}{2\sigma^2}} \left[1 - Q\left(\frac{A\cos\theta}{\sigma}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

- I_0 representa a função de Bessel modificada de ordem zero, que é em geral encontrada em tabelas