Processos Aleatórios

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

November 9, 2020

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- Sinais aleatórios são sinais de potência $t \in (-\infty, \infty)$
- A DEP de um processo aleatório pode ser definida como a média da DEP de uma família de funções amostras
- Para um sinal determinístico $x(t)$, a DEP é dada por:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$$

- Sendo que,

$$x_T(t) = x(t)u\left(\frac{t}{T}\right) \Longleftrightarrow X_T(\omega)$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- Para um sinal aleatório $x(t)$, a DEP é dada por:

$$
\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \overline{\left[\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}\right]} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\overline{\left|\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j\omega t}dt\right]\right|^2} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\overline{\left|\left[\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]\right|^2} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\overline{\left[\left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t_1)e^{-j\omega t_1}dt_1\right)^* \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t_2)e^{-j\omega t_2}dt_2\right)\right]}
\end{aligned}
$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

$$
\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{\left[\left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t_1)e^{j\omega t_1}dt_1\right)\left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t_2)e^{-j\omega t_2}dt_2\right)\right]} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)rect(\frac{t_1}{T})e^{j\omega t_1}dt_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t_2)rect(\frac{t_2}{T})e^{-j\omega t_2}dt_2\right)\right]} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} rect(\frac{t_1}{T})rect(\frac{t_2}{T})x(t_1)x(t_2)e^{-j\omega(t_2-t_1)}dt_1dt_2\right]} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} rect(\frac{t_1}{T})rect(\frac{t_2}{T})\overline{x(t_1)x(t_2)}e^{-j\omega(t_2-t_1)}dt_1dt_2 \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} rect(\frac{t_1}{T})rect(\frac{t_2}{T})R_x(t_1,t_2)e^{-j\omega(t_2-t_1)}dt_1dt_2 \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} rect(\frac{t_1}{T})rect(\frac{t_2}{T})R_x(t_2-t_1)e^{-j\omega(t_2-t_1)}dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

- Fazendo-se a mudança de variáveis: $t = t_1$, $\tau = t_2 - t_1$
- Então: $dtd\tau = |\det(J)|dt_1 dt_2$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(J) = 1 \Longrightarrow dtd\tau = dt_1 dt_2$$

- Substituindo-se, tem-se:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} rect(\frac{t}{T}) rect(\frac{t+\tau}{T}) R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} dtd\tau \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} rect(\frac{t}{T}) rect(\frac{t+\tau}{T}) dt \right) d\tau \end{aligned}$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- A integral entre parênteses é a convolução entre dois retângulos de largura T, sendo assim, tem-se:

$$
\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} (T - |\tau|) rect\left(\frac{\tau}{2T}\right) d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} (1 - \frac{|\tau|}{T}) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau
\end{aligned}
$$

- O resultado anterior corresponde ao teorema de Wiener-Kintchine, que estabelece que se $x(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo, então:

$$
S_x(\omega) = \mathcal{F}[R_x(\tau)]
$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- Algumas propriedades importantes podem ser verificadas
  - Para processos reais, a autocorrelação é uma função par:

$$R_x(\tau) \quad = \quad R_x(-\tau)$$

  - A autocorrelação em $\tau = 0$ é dada por:

$$R_x(0) \quad = \quad \overline{x(t)x(t)} = \overline{x^2(t)} = \overline{x^2}$$

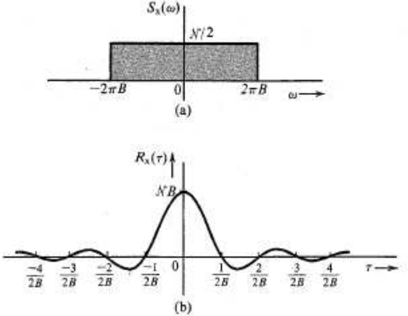
  - A potência de $x(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} P_x \quad &= \quad \overline{x^2} = R_x(0) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega\right]\Big|_{\tau=0} \\ &= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega \end{aligned}$$

Ruído Branco Passa-Baixas

Exemplo 11.2

Determinar $R_x(\tau)$ e a potência P_x para um processo aleatório $x(t)$, sendo $x(t)$ um processo de ruído branco passa-baixas com DEP $S_x(\omega) = \mathcal{N}/2$



Ruído Branco Passa-Baixas

Exemplo 11.2 - Solução

$$
\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \frac{\mathcal{N}}{2} rect\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) \\
R_x(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_x(\omega)\} = \frac{\mathcal{N}}{2}\frac{2\pi B}{\pi} sinc(2\pi B\tau) = \mathcal{N} B sinc(2\pi B\tau) \\
P_x &= R_x(0) = \mathcal{N} B \text{ ou } P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{\mathcal{N}}{2} d\omega = \mathcal{N} B
\end{aligned}
$$

Processo Aleatório Senoidal

Exemplo 11.3

Determinar a DEP e o valor médio quadrático de $x(t) = A\cos(\omega_c t + \Theta)$, sendo Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$.

Exemplo 11.3 - Solução

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau \\
S_x(\omega) &= \frac{\pi A^2}{2}[\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)] \\
P_x &= \overline{x^2} = R_x(0) = \frac{A^2}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 11.4

Determinar a função de autocorrelação e a DEP do processo aleatório modulado em AM-DSB-SC $\varphi(t) = m(t) \cos(\omega_c t + \Theta)$, sendo $m(t)$ um processo aleatório estacionário no sentido amplo e Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$ independente de $m(t)$.

Modulação AM

Exemplo 11.4 - Solução

$$
\begin{aligned}
R_\varphi(\tau) &= \overline{\varphi(t)\varphi(t+\tau)} \\
&= \overline{m(t)\cos(\omega_c t + \Theta) m(t+\tau)\cos(\omega_c(t+\tau)+\Theta)} \\
&= \overline{m(t)m(t+\tau)\cos(\omega_c t + \Theta)\cos(\omega_c t + \omega_c\tau + \Theta)} \\
&= \overline{m(t)m(t+\tau)}.\overline{\cos(\omega_c t + \Theta)\cos(\omega_c t + \omega_c\tau + \Theta)} \\
&= \frac{1}{2}R_m(\tau)\cos\omega_c\tau \\
S_\varphi(\omega) &= \frac{1}{4}[S_m(\omega+\omega_c) + S_m(\omega-\omega_c)] \\
\overline{\varphi^2(t)} &= R_\varphi(0) = \frac{1}{2}R_m(0) = \frac{1}{2}\overline{m^2(t)}
\end{aligned}
$$

Processos Aleatórios Múltiplos

- Seja $x(t)$ e $y(t)$ dois processos aleatórios, então a função de correlação cruzada é definida como:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)y(t_2)}$$

- $x(t)$ e $y(t)$ são conjuntamente estacionários se cada um deles é estacionário no sentido amplo e se:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_2 - t_1) = R_{xy}(\tau)$$

- $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados se:

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)} = \overline{x}.\overline{y}$$

Processos Aleatórios Múltiplos

- $x(t)$ e $y(t)$ são não-coerentes ou ortogonais se:

$$R_{xy}(\tau) = 0$$

- Processos ortogonais são processos descorrelacionados com $\overline{x} = 0$ e/ou $\overline{y} = 0$
- $x(t)$ e $y(t)$ são independentes se as variáveis aleatórias $x(t_1)$ e $y(t_2)$ são independentes
    - Processos independentes são descorrelacionados

Processos Aleatórios Múltiplos

- A DEP cruzada $S_{xy}(\omega)$ é definida como

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{X_T^*(\omega)Y_T(\omega)}}{T}$$

- Usando-se argumentos similares aos empregados anteriormente, mostra-se que:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &\iff S_{xy}(\omega) \\ R_{xy}(\tau) &= R_{yx}(-\tau) \text{ (Processos Reais)} \\ S_{xy}(\omega) &= S_{yx}(-\omega) \text{ (Processos Reais)} \end{aligned}$$

Processos Aleatórios Múltiplos

- Se $x(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo e $y(t)$ é a saída de um sistema linear cuja entrada é $x(t)$, então:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha$$

- Logo,

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= \overline{y(t)y(t+\tau)} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)x(t+\tau-\beta)d\beta} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)x(t-\alpha)x(t+\tau-\beta)d\alpha d\beta} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)\overline{x(t-\alpha)x(t+\tau-\beta)}d\alpha d\beta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_x(\tau+\alpha-\beta)d\alpha d\beta
\end{aligned}$$

Processos Aleatórios Múltiplos

- Então

$$R_y(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_x(\tau)$$

- Logo, a DEP de $y(t)$ é dada por:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

- De modo análogo, as seguintes relações também podem ser obtidas:

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= S_x(\omega)H(\omega) \\ S_{yx}(\omega) &= S_x(\omega)H^*(\omega) \end{aligned}$$

Soma de Processos Aleatórios

- Se dois processos aleatórios $x(t)$ e $y(t)$ são adicionados, resultando em $z(t) = x(t) + y(t)$, então:

$$R_z(\tau) = \overline{z(t)z(t+\tau)} = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx(\tau)}$$

- Se $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados, então:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2\overline{x}.\overline{y}$$

- Se $x(t)$ e $y(t)$ são ortogonais, então:

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \\ S_z(\omega) &= S_x(\omega) + S_y(\omega) \\ \overline{z^2} &= \overline{x^2} + \overline{y^2} \end{aligned}$$

Ruído Térmico

Exemplo 11.9

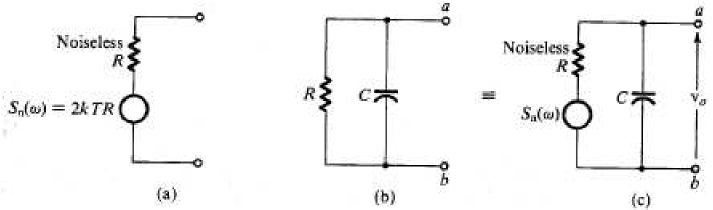
O movimento aleatório dos elétrons em um resistor R origina uma tensão entre os seus terminais. Esta tensão $n(t)$ é conhecida como ruído térmico. A sua DEP $S_n(\omega)$ é praticamente plana sobre uma extensa banda (até 1000 GHz na temperatura ambiente) e é dada por:

$$S_n(\omega) \quad = \quad 2kTR \quad (k = 1,38 \times 10^{-23})$$

Um resistor R na temperatura T pode ser representado por um resistor sem ruído R em série com uma fonte de ruído branco com DEP $S_n(\omega)$. Calcule o valor RMS da tensão ao longo do circuito RC mostrado a seguir.

Ruído Térmico

Exemplo 11.9



Ruído Térmico

Exemplo 11.9 - Solução

A função de transferência relacionando a saída v_o com a entrada $S_n(\omega)$ é dada por:

$$H(\omega) \;=\; \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Sendo $S_o(\omega)$, a DEP da saída v_o, então:

$$\begin{aligned}
S_o(\omega) &= \left|\frac{1}{1 + j\omega RC}\right|^2 2kTR = \frac{2kTR}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \\
\overline{v_o^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2kTR}{1 + \omega^2 R^2 C^2} d\omega = \frac{kT}{C} \\
v_o(RMS) &= \sqrt{\frac{kT}{C}}
\end{aligned}$$