Processos Aleatórios

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

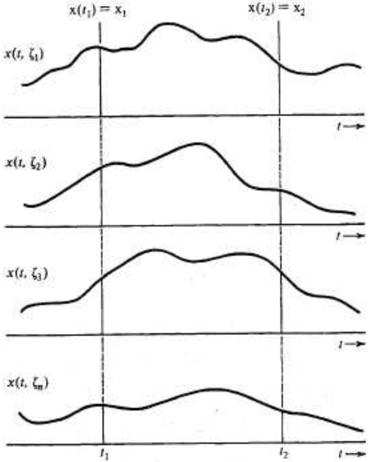
www.univasf.edu.br/˜edmar.nascimento

November 9, 2020

Processos Aleatórios

- Os processos aleatórios também são denominados de processos estocásticos e representam uma extensão do conceito de variável aleatória para sistemas dinâmicos (que dependem do tempo)
- O seguinte exemplo ilustra esse conceito:
  - A temperatura ao meio dia pode ser representada por uma variável aleatória
  - Para obter a fdp dessa variável aleatória é necessário repetir a medida da temperatura diversas vezes no mesmo horário
  - A temperatura em outro horário provavelmente terá uma fdp diferente da temperatura ao meio dia

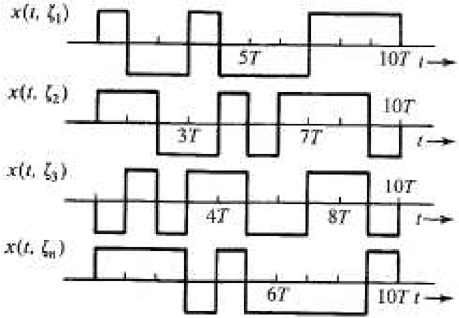
Processos Aleatório Representando a Temperatura



Processos Aleatórios

- A conclusão obtida a partir do exemplo precedente é que a temperatura é uma variável aleatória dependente do tempo, ou seja, um processo aleatório
- Outros exemplos de processos aleatórios são:
  - A tensão na saída de um resistor
  - A pontuação na bolsa de valores
- Um processo aleatório $x(t)$ é caracterizado por uma família (ensemble) de funções amostras

Saída de um Gerador Binário Aleatório



Processos Aleatórios

- Cada função amostra é representada por $x(t, \xi_i)$, em que ξ_i representa o dia em que a temperatura foi medida para o exemplo da temperatura
- $x_i = x(t_i)$ é uma variável aleatória representando as amplitudes do processo aleatório no instante t_i
- x_i é completamente caracterizada pela sua fdp denotada por $p_{x_i}(x_i)$
- $x(t_i, \xi_i)$ representa apenas um valor obtido para o processo aleatório no tempo t_i para a realização ξ_i

Processos Aleatórios

- Um processo aleatório pode ser completamente especificado através de uma expressão analítica
  - $x(t) = A\cos(\omega_c t + \Theta)$, sendo Θ uma variável aleatória uniforme na faixa $(0, 2\pi)$ é completamente caracterizado por essa expressão
- Entretanto, na maioria das vezes, as famílias de funções amostras só são obtidas experimentalmente
- O processo aleatório pode ser especificado por uma coleção de variáveis aleatórias dependentes do tempo

Processos Aleatórios

- Se considerarmos n instantes de tempo, obtém-se n variáveis aleatórias $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
- Essas n variáveis aleatórias são completamente caracterizadas pela sua fdp conjunta $p_{x_1 x_2 \cdots x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ para todo n
  - A integração da fdp conjunta fornece as fdps de ordem mais baixa
  - A tarefa de obtenção da fdp conjunta é extremamente complicada e as vezes, impossível
- Felizmente, para os processos aleatórios relevantes, é suficiente conhecer a sua média e a sua autocorrelação

Estatísticas de um Processo

- A média ou valor esperado de um processo aleatório $x(t)$ é uma função do tempo dada por

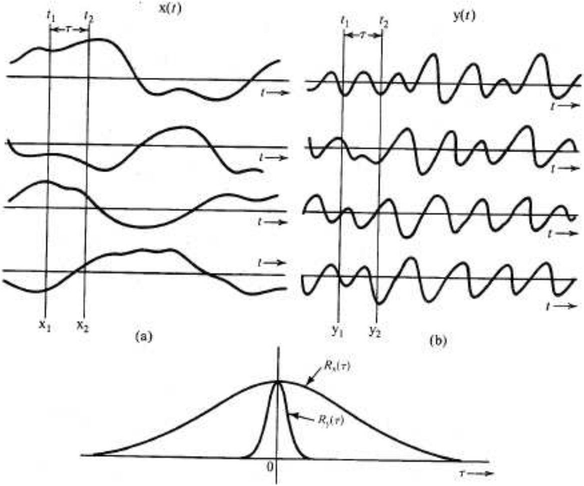
$$\overline{x(t)} = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x;t) dx$$

- A função de autocorrelação é dada pela correlação entre duas variáveis aleatórias nos instantes t_1 e t_2: $x(t_1)$ e $x(t_2)$

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \overline{x(t_1)x(t_2)} = \overline{x_1 x_2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{x_1 x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

- A autocorrelação é uma média na família de funções amostras

Função de Autocorrelação



Classificação dos Processos Aleatórios

- Os processos aleatórios podem ser classificados como estacionários ou não estacionários
  - Em um processo estacionário no sentido estrito, as características estatísticas não mudam com o tempo
  - $p_x(x;t)$ é independente de t
  - $R_x(t_1, t_2)$ depende apenas da diferença $\tau = t_2 - t_1$ e não de t_1 e t_2 especificamente

$$\begin{aligned} p_x(x;t) &= p_x(x) \\ R_x(t_1, t_2) &= R_x(t_2 - t_1) \Longrightarrow R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} \end{aligned}$$

Classificação dos Processos Aleatórios

- É difícil verificar se um processo aleatório é estritamente estacionário na prática
- Por essa razão, se utiliza a definição de processo aleatório estacionário no sentido amplo
- Um processo é estacionário no sentido amplo se:

$$\begin{aligned}\overline{x(t)} &= \text{constante} \\ R_x(t_1, t_2) &= R_x(\tau) \quad \tau = t_1 - t_2\end{aligned}$$

Processos Estacionários

Exemplo 11.1

Mostre que o processo aleatório $x(t) = A\cos(\omega_c t + \Theta)$ sendo Θ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$ é um processo estacionário no sentido amplo.

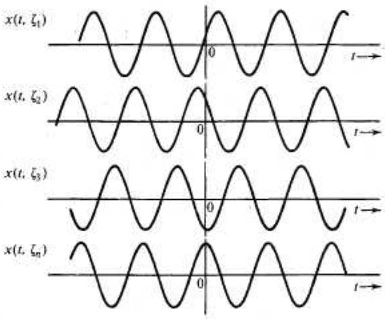


Figure 11.5 Ensemble for the random process $A\cos(\omega_c t + \Theta)$.

Processos Estacionários

Exemplo 11.1 - Solução

Para calcular $\overline{x(t)}$ pela definição é necessário determinar $p_x(x,t)$, o que não é tão simples. Uma maneira mais simples é fazer:

$$\overline{x(t)} = \overline{A\cos(\omega_c t + \Theta)} = A\overline{\cos(\omega_c t + \Theta)}$$

Como $\cos(\omega_c t + \Theta)$ é uma função da variável aleatória Θ, então:

$$\begin{aligned}\overline{\cos(\omega_c t + \Theta)} &= \int_0^{2\pi} \cos(\omega_c t + \theta) p_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega_c t + \theta) d\theta = 0\end{aligned}$$

Exemplo 11.1 - Solução

Então:

$$\overline{x(t)} = 0$$

Para concluir a demonstração, é necessário mostrar que $R_x(t_1, t_2)$ depende apenas de $t_2 - t_1$

$$\begin{aligned}
R_x(t_1, t_2) &= \overline{A^2 \cos(\omega_c t_1 + \Theta) \cos(\omega_c t_2 + \theta)} \\
&= \frac{A^2}{2}\{\overline{\cos[\omega_c(t_2 - t_1)]} + \overline{\cos[\omega_c(t_2 + t_1) + 2\Theta]}\} \\
&= \frac{A^2}{2} \cos[\omega_c(t_2 - t_1)] = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c \tau
\end{aligned}$$

Classificação dos Processos Aleatórios

- Uma outra classificação importante para processos aleatórios é a dos processos ergódicos
- Um processo é ergódico se as médias temporais (para uma função amostra em particular) são iguais às médias estatísticas (tomadas sobre uma família de funções amostras)
- Para processos ergódicos, as seguintes relações são verificadas:

$$\begin{aligned} \overline{x(t)} &= \widetilde{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt \\ R_x(\tau) &= \mathcal{R}_x(\tau) = \widetilde{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \end{aligned}$$

Classificação dos Processos Aleatórios