Princípios da Transmissão Digital

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

October 25, 2020

Formatação de Pulso (Pulse Shaping)

- Além do código de linha, a DEP $S_y(\omega)$ é fortemente dependente da forma do pulso, pois ela contém o termo $|P(\omega)|^2$
- Para os pulsos retangulares vistos anteriormente, a largura de banda é infinita, embora a banda essencial se situe entre R_b e $2R_b$
- A porção do espectro acima da banda essencial é suprimida quando o sinal é transmitido através de um canal com largura de banda finita
  - Os pulsos são espalhados para além do intervalo do bit (efeito de dispersão)
  - Os pulsos passam então a interferir nos pulsos vizinhos dando origem à Interferência Intersimbólica (ISI - Intersymbol Interference)

Interferência Intersimbólica

- Pulsos limitados no tempo possuem espectro infinito
- Pulsos limitados em frequência não são limitados no tempo
- A solução para esse problema é evitar a interferência nos instantes de decisão apenas
  - No instante em que se precisa saber se o pulso representa um 0 ou 1
- Para eliminar a ISI, os pulsos devem possuir um formato específico proposto por Nyquist

Critério de Nyquist para ISI Nula

- A ISI nula é alcançada escolhendo-se um pulso que tem amplitude não nula no centro e nula nos instantes $t = \pm nT_b (n = 1, 2, 3, \cdots)$, sendo $T_b = 1/R_b$ a separação entre pulsos sucessivos

$$p(t) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \quad , t = 0 \\ 0 \quad , t = \pm nT_b \end{array} \right\}$$

- Para transmitir R_b bits/s é necessário no mínimo $(R_b/2)$Hz
- Essa banda mínima é alcançada com um pulso $p(t) = sinc(\pi R_b t)$

Critério de Nyquist para ISI Nula

- $p(t) = sinc(\pi R_b t)$ satisfaz o critério de Nyquist, pois

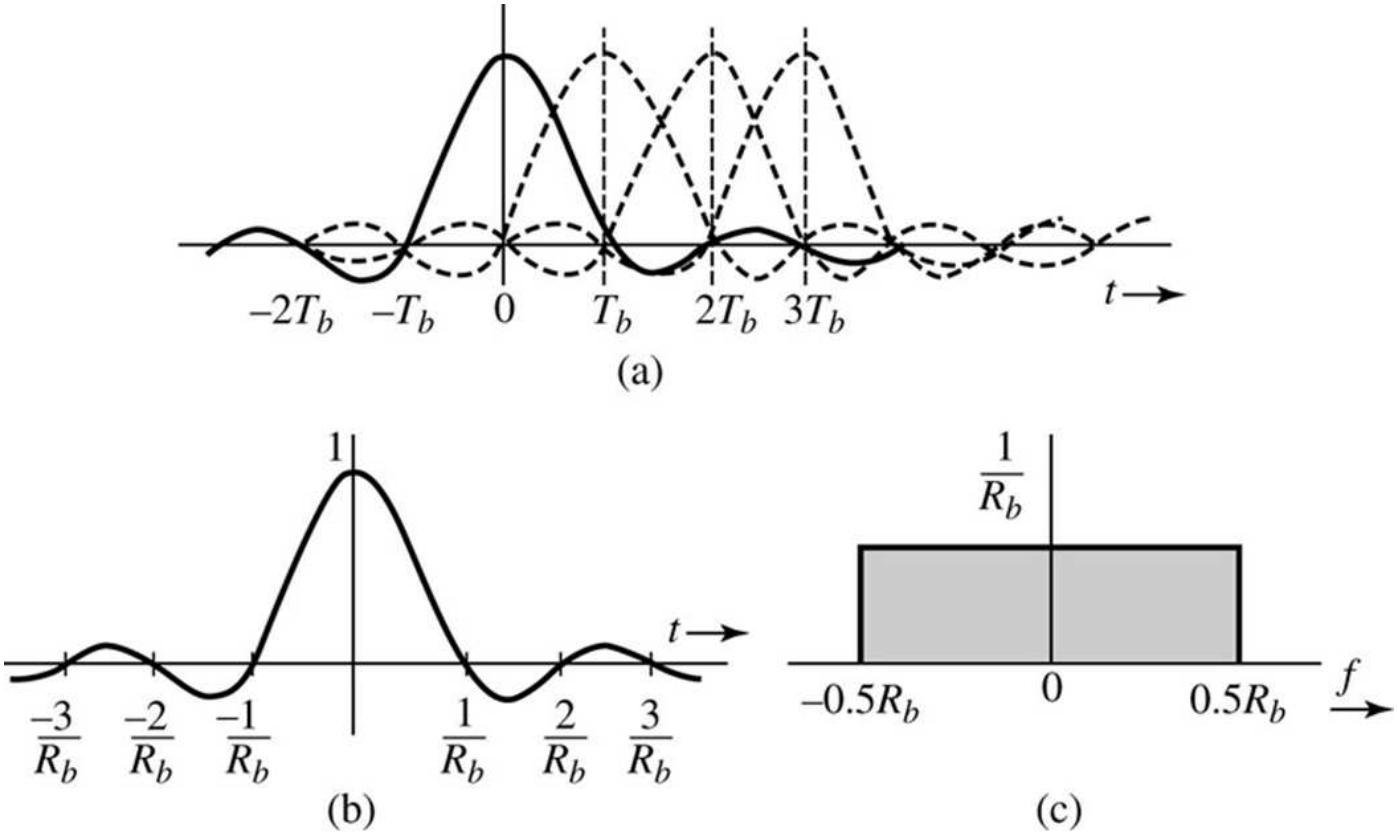
$$sinc(\pi R_b t) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & , t = 0 \\ 0 & , t = \pm n T_b \end{array} \right\}$$

- Além disso,

$$P(\omega) = \frac{1}{R_b} rect\left(\frac{\omega}{2\pi R_b}\right)$$

- Este pulso tem então uma banda de πR_b rad/s ou $R_b/2$ Hz, que é a banda teórica mínima necessária para a transmissão

Critério de Nyquist para ISI Nula

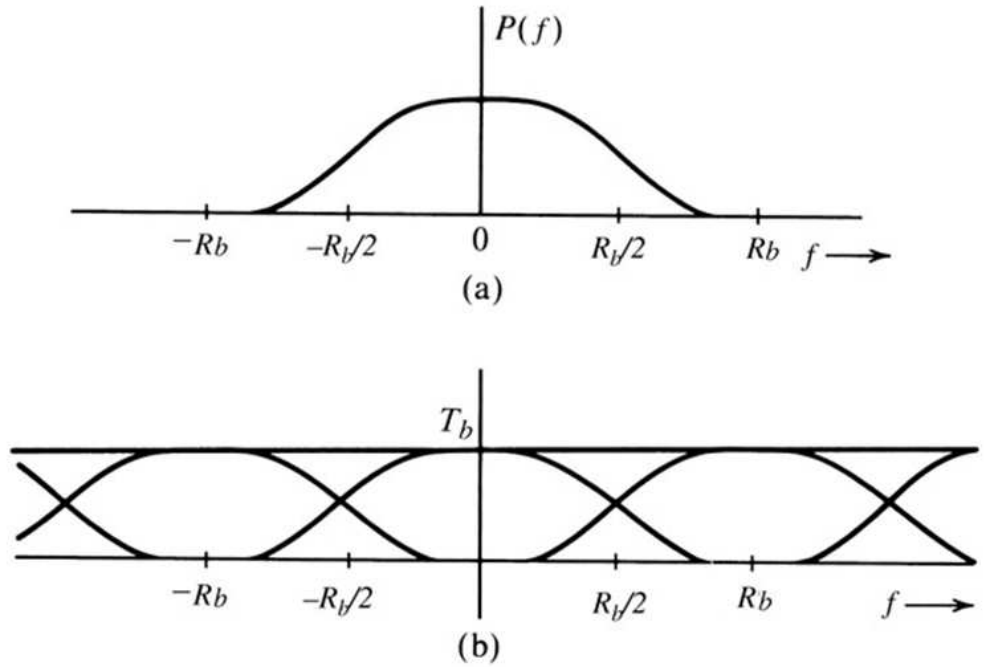


Critério de Nyquist para ISI Nula

- O pulso sinc apresenta alguns problemas que impedem a sua utilização:
  - Seria necessário um tempo infinito para gerá-lo
  - Uma versão truncada desse pulso possui uma banda maior
  - A sua taxa de decaimento é lenta $(1/t)$, o que causaria problemas se a taxa de amostragem variar um pouco
  - Em resumo, o sinc só pode ser usado se tudo ocorre perfeitamente bem
- A solução é usar pulsos que decaem mais rapidamente
- Ao se permitir a utilização de uma banda maior que a mínima teórica, esses pulsos com decaimento mais rápido podem ser obtidos

Critério de Nyquist para ISI Nula

- O pulso $p(t) \Longleftrightarrow P(\omega)$ com largura de banda no intervalo $(R_b/2, R_b)$ satisfaz o critério de Nyquist



- Se esse pulso é amostrado a cada T_b segundos por um trem de impulsos, então:

$$\bar{p}(t) \quad = \quad p(t)\delta_{T_b}(t) = \delta(t)$$

Critério de Nyquist para ISI Nula

- O espectro do sinal amostrado $\bar{p}(t)$ satisfaz a relação:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\omega - n\omega_b) = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\omega - n\omega_b) = T_b$$

- Na faixa $0 < \omega < \omega_b$, apenas os termos $P(\omega)$ e $P(\omega - \omega_b)$ estão presentes no somatório, logo

$$P(\omega) + P(\omega - \omega_b) = T_b, \quad 0 < \omega < \omega_b$$

Critério de Nyquist para ISI Nula

- Fazendo $\omega = x + \omega_b/2$, então

$$P\left(x + \frac{\omega_b}{2}\right) + P\left(x - \frac{\omega_b}{2}\right) = T_b, \quad |x| < \frac{\omega_b}{2}$$

- Usando o fato de que para sinais reais, $G(\omega) = G^*(-\omega)$, então

$$P\left(x + \frac{\omega_b}{2}\right) + P^*\left(\frac{\omega_b}{2} - x\right) = T_b, \quad |x| < \frac{\omega_b}{2}$$

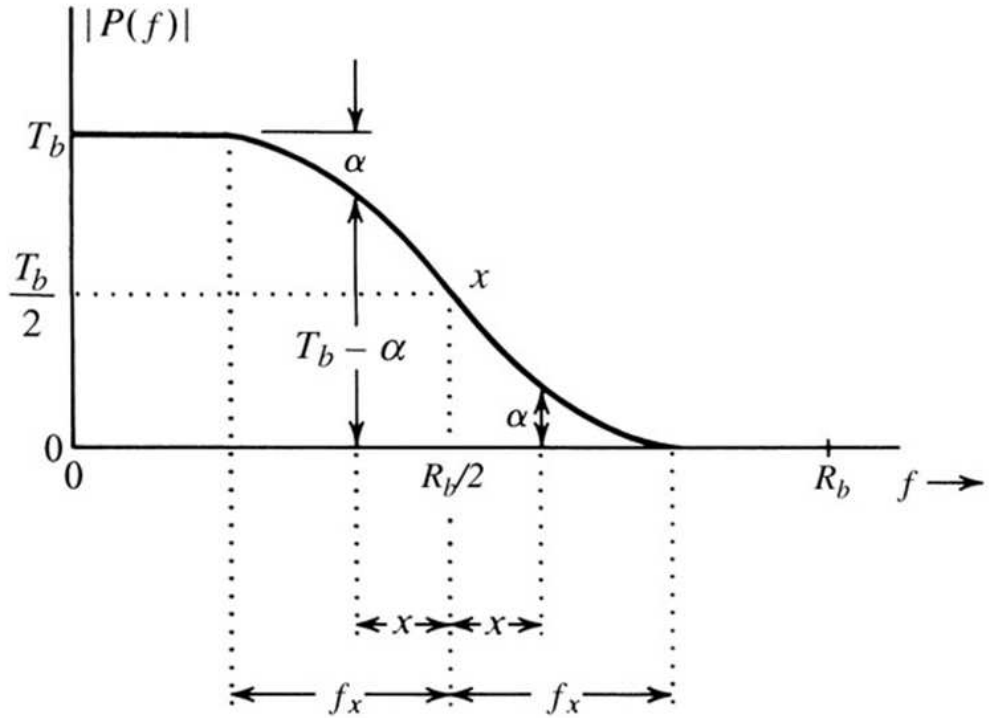
- Se $P(\omega) = |P(\omega)|e^{-j\omega t_d}$, então $e^{-j\omega t_d}$ representa um termo de atraso puro e apenas $|P(\omega)|$ necessita satisfazer a relação anterior

Critério de Nyquist para ISI Nula

- Sendo assim, chega-se a seguinte expressão:

$$|P\left(\frac{\omega_b}{2}+x\right)|+|P\left(\frac{\omega_b}{2}-x\right)| \quad = \quad T_b, \quad |x|<\frac{\omega_b}{2}$$

- O espectro de $p(t)$ satisfazendo a relação obtida é mostrado abaixo



Critério de Nyquist para ISI Nula

- De acordo com a figura, a largura de banda de $P(\omega)$ é $(\omega_b/2) + \omega_x$, sendo ω_x o excesso de banda, então:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{Excesso de Largura de Banda}}{\text{Largura de Banda Teórica Mínima}} \\ &= \frac{\omega_x}{\omega_b/2} = \frac{f_x}{R_b/2} = \frac{2f_x}{R_b} \end{aligned}$$

- r é chamado de fator de decaimento (roll-off) e é representado muitas vezes percentualmente
- Como $\omega_x < \omega_b/2$, então $0 < r < 1$, além disso:

$$B_T = \frac{R_b}{2} + r\frac{R_b}{2} = \frac{(1+r)R_b}{2}$$

Critério de Nyquist para ISI Nula

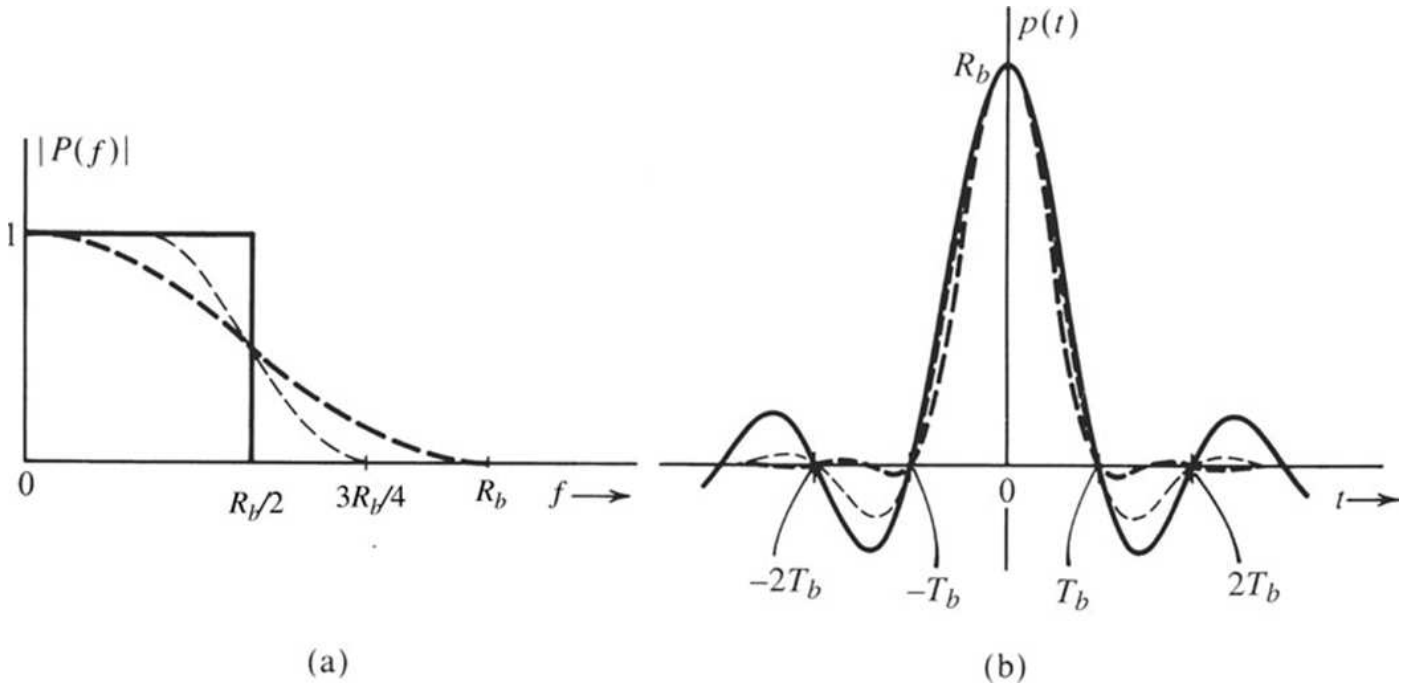
- Como o espectro desses pulsos possuem um decaimento gradual, eles podem ser aproximados facilmente por filtros práticos
- Uma família de espectros que satisfazem o critério de Nyquist é dada por:

$$P(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{1 - \sin\left(\frac{\pi[\omega-(\omega_b/2)]}{2\omega_x}\right)\right\}, & |\omega - \frac{\omega_b}{2}| < \omega_x \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_b}{2} + \omega_x \\ 1, & |\omega| < \frac{\omega_b}{2} - \omega_x \end{cases}$$

- Observa-se que quanto maior o ω_x, maior é o decaimento do espectro

Critério de Nyquist para ISI Nula

- Pulsos satisfazendo o critério de Nyquist



Critério de Nyquist para ISI Nula

- Para o valor máximo de ω_x, ou seja $\omega_x = \omega_b/2$, o pulso resultante é chamado cosseno levantado (raised-cosine)
- O espectro do pulso cosseno levantado é dado por:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\omega}{2R_b}\right) rect\left(\frac{\omega}{4\pi R_b}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\omega}{4R_b}\right) rect\left(\frac{\omega}{4\pi R_b}\right) \end{aligned}$$

- A sua expressão no tempo é dada por:

$$p(t) = R_b \frac{\cos \pi R_b t}{1-4R_b^2 t^2} sinc(\pi R_b t)$$

Critério de Nyquist para ISI Nula

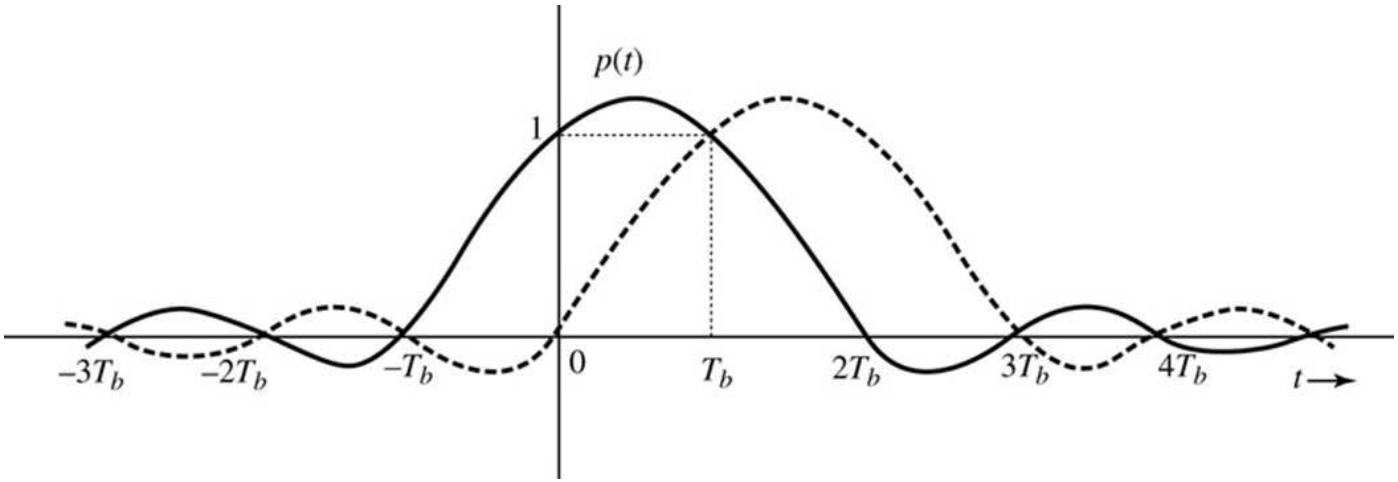
- O pulso cosseno levantado possui as seguintes características:
  - A sua taxa de decaimento é de $1/t^3$, ou seja, ele decai muito rapidamente
  - Ele se anula não apenas nos instantes de amostragem, mas nos pontos médios entre os instantes de amostragem
  - É bastante insensível ao jitter e a variações na taxa de amostragem e na taxa de transmissão
- É importante ressaltar que as condições para ISI nula se referem a todo o processo de transmissão (transmissor, canal e receptor)
- Se o canal introduzir ISI, esta deve ser cancelada por meio de equalizadores

Sinalização com ISI Controlada

- O preço pago pela ISI nula é a utilização de uma banda superior à banda teórica mínima
- Para reduzir a banda é necessário alargar o pulso, o que pode causar ISI com os pulsos vizinhos
- Para sistemas binários essa ISI pode ser tolerada, pois só existem dois padrões de interferência
- Considerando-se o pulso especificado por:

$$p(nT_b) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{para outro n} \end{array} \right\}$$

Sinalização com ISI Controlada



Sinalização com ISI Controlada

- Utilizando a sinalização polar com este pulso
  - 1 transmitido por $p(t)$
  - 0 transmitido por $-p(t)$
- Nesse esquema, o pulso interfere com o seu vizinho, mas mesmo assim é possível recuperar a informação
  - Se dois pulsos sucessivos são positivos então o valor em T_b (ponto de interferência) é 2
  - Se dois pulsos sucessivos são negativos então o valor em T_b é -2
  - Se dois pulsos sucessivos são de polaridade oposta então o valor em T_b é 0

Sinalização com ISI Controlada

- Pode-se então criar a seguinte regra de decisão:
  - Se o valor da amostra é positivo, o bit atual é 1 e o anterior é 1 também
  - Se o valor da amostra é negativo, o bit atual é 0 e o anterior é 0 também
  - Se o valor da amostra é zero, o bit atual é o complemento do bit anterior

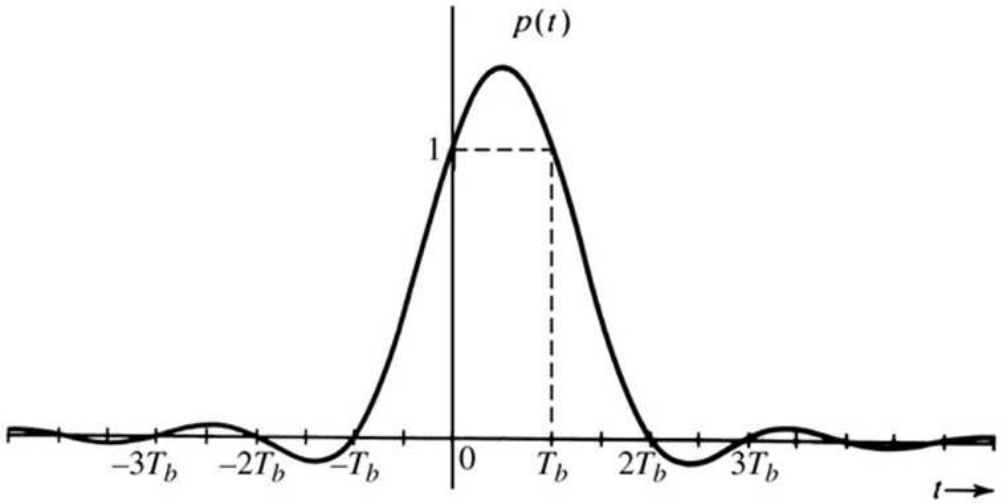
Transmitted sequence	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
Samples of $x(t)$	1	2	0	0	2	0	−2	−2	0	0	0	2	2
Detected sequence	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1

Sinalização com ISI Controlada

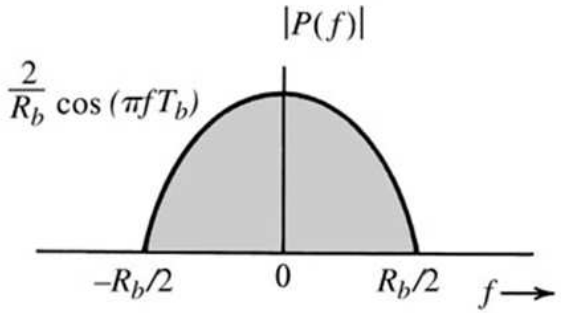
- Este esquema de ISI controlada é o segundo método proposto por Nyquist para lidar com a ISI
- Este esquema também é conhecido como esquema correlativo ou de resposta parcial
- Um pulso que satisfaz este critério é chamado de pulso duobinário (duobinary pulse)
- O pulso duobinário é dado por:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \frac{\sin(\pi R_b t)}{\pi R_b t(1 - R_b t)} \\
P(\omega) &= \frac{2}{R_b} \cos\left(\frac{\omega}{2R_b}\right) rect\left(\frac{\omega}{2R_b}\right) e^{-j\frac{\omega}{2R_b}}
\end{aligned}
$$

Pulso Duobinário



(a)



(b)

Sinalização com ISI Controlada

- Este esquema de ISI controlada permite a transmissão de dados a R_b bits/s com a banda teórica mínima de $R_b/2$ Hz
- O pulso duobinário não é causal e portanto não é fisicamente realizável
- O pulso decai rapidamente $(1/t^2)$ e pode ser aproximado com precisão
- No esquema com ISI controlada pode haver propagação de erros, pois a interpretação do bit atual depende do resultado anterior
  - Esse problema pode ser corrigido usando a codificação diferencial