

Amostragem e Conversão A/D

Edmar J Nascimento

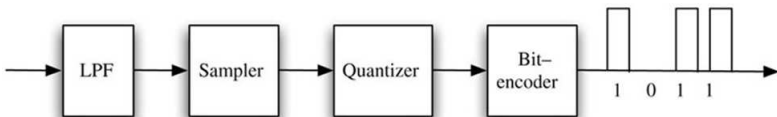
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

October 10, 2020

Pulse-Code Modulation (PCM)

- A Modulação por codificação de pulso (PCM) é uma ferramenta usada para a conversão A/D
- Com PCM, um sinal analógico contínuo no tempo é convertido em um sinal digital
- No processo de conversão, o sinal é amostrado e em seguida quantizado



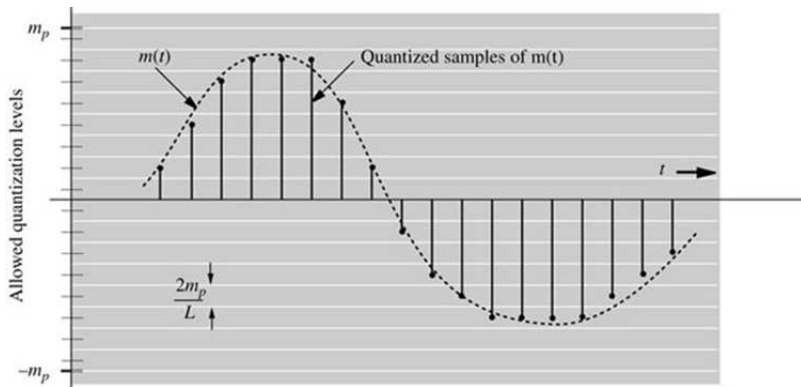
Pulse-Code Modulation (PCM)

- Em PCM, as amplitudes são arredondadas para um dentre L níveis discretos (níveis quantizados)
- Se o sinal analógico $m(t)$ possui amplitudes na faixa $(-m_p, m_p)$, o tamanho de cada intervalo é dado por:

$$\Delta v = \frac{2m_p}{L}$$

- Cada amostra é aproximada para o ponto médio do intervalo em que ela se encontra
- Um sinal desse tipo é conhecido como um sinal digital L-ário

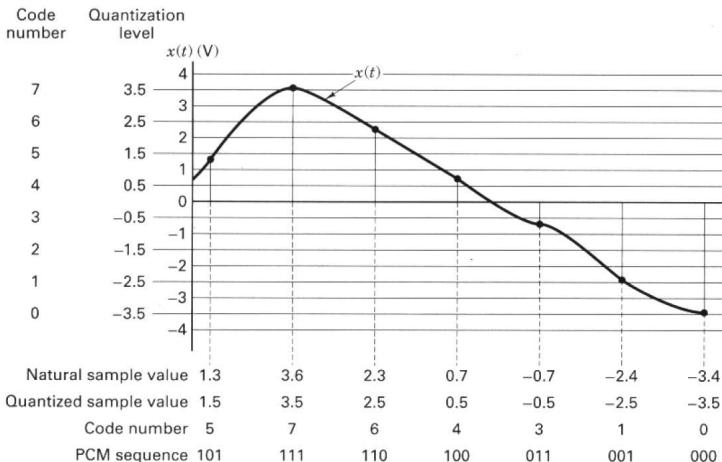
Pulse-Code Modulation (PCM)



Pulse-Code Modulation (PCM)

- Do ponto de vista prático, sinais binários são desejáveis
- Para converter um sinal digital L-ário em um sinal binário (2 níveis - 0 e 1) pode-se utilizar algum tipo de codificação
 - BCD, Gray, NBC, etc.
- L níveis correspondem a L símbolos que correspondem a $\log_2 L$ bits
- Em telefonia, tem-se:
 - $f_{min} = 300\text{Hz}$, $f_{max} = 3400\text{Hz}$ e $B = 3100\text{Hz}$
 - $f_s = 6,8\text{kHz}$, mas na prática escolhe-se $f_s = 8\text{kHz}$
 - $L = 256$ ou 8 bits por amostra
 - $R = 64\text{kbps}$

Pulse-Code Modulation (PCM)



Pulse-Code Modulation (PCM)

- Em som com qualidade de CD, tem-se:
 - $B = 15kHz$
 - $f_s = 30kHz$, mas na prática escolhe-se $f_s = 44,1kHz$
 - $L = 65536$ ou 16 bits por amostra
 - $R = 705,6kbps$
 - Uma hora de som nesta qualidade resulta em 317,52 MB (Mega Byte)

Vantagens da Comunicação Digital

- As comunicações digitais apresentam várias vantagens, dentre as quais:
 - Maior robustez (desde que o ruído e distorções estejam dentro de limites)
 - Uso de repetidores regenerativos
 - Hardware digital (microprocessadores, circuitos integrados)
 - Multiplexação mais simples
 - Compromisso entre SNR e largura de banda
 - Armazenamento simples e barato
 - Reprodução sem deterioração
 - Custo do hardware decrescente

Quantização

- O erro na aproximação da amostra $m(kT_s)$ pelo ponto médio do intervalo de quantização gera um **erro de quantização**
- Seja $m(t)$ o sinal, $m(kT_s)$ a amostra contínua no instante kT_s e $\hat{m}(kT_s)$ a amostra quantizada
- A partir da fórmula de interpolação, tem-se que:

$$m(t) = \sum_k m(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)$$
$$\hat{m}(t) = \sum_k \hat{m}(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)$$

- Sendo que $\hat{m}(t)$ é o sinal reconstruído a partir de suas amostras quantizadas

Quantização

- Seja $q(t) = \hat{m}(t) - m(t)$, então:

$$\begin{aligned} q(t) &= \sum_k [\hat{m}(kT_s) - m(kT_s)] \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \\ &= \sum_k q(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \end{aligned}$$

- Em que $q(kT_s)$ é o erro de quantização da k -ésima amostra
- $q(t)$ é chamado de ruído de quantização

Erro de Quantização

- A potência do erro é dada por:

$$\begin{aligned}P_q &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q^2(t) dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_k q(kT_s) \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \right]^2 dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2BT} \sum_k q^2(kT_s)\end{aligned}$$

- Esta equação representa a média do quadrado do erro de quantização

Erro de Quantização

- Para se calcular P_q , pode-se admitir que o erro é uniformemente distribuído na faixa $(-\Delta v/2, \Delta v/2)$, assim, tem-se:

$$P_q = \frac{1}{\Delta v} \int_{-\Delta v/2}^{\Delta v/2} q^2 dq = \frac{(\Delta v)^2}{12} = \frac{m_p^2}{3L^2}$$

- A potência do ruído de quantização P_q pode ser denotada por N_q (N de noise (ruído em inglês)), assim:

$$N_q = \frac{(\Delta v)^2}{12} = \frac{m_p^2}{3L^2}$$

Erro de Quantização

- A razão sinal ruído pode ser calculada observando-se que:

$$\hat{m}(t) = m(t) + q(t)$$

$$S_o = P_m$$

$$N_o = N_q = \frac{m_p^2}{3L^2}$$

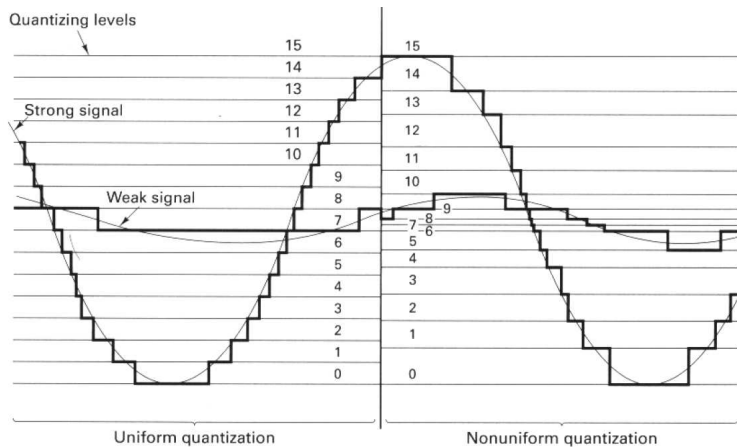
- Assim, a SNR é dada por:

$$\frac{S_o}{N_o} = 3L^2 \frac{P_m}{m_p^2}$$

Quantização não Uniforme

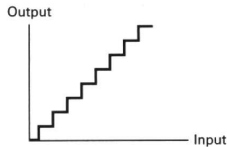
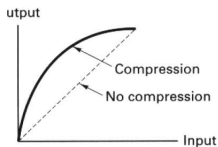
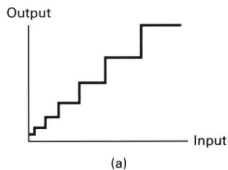
- A razão sinal ruído deveria ser constante, mas ela varia com a potência do sinal
- No caso dos sinais de voz, a SNR é maior para uma voz forte
 - Podem existir variações de até 40dB (10^4)
- A causa disso é o fato da quantização ser uniforme
 - Intervalos de mesmo tamanho
- A solução é usar um passo de quantização menor para amplitudes maiores, pois $N_q = (\Delta v)^2/12$
- O equivalente de um passo de quantização menor pode ser obtido através da compressão do sinal seguida da quantização uniforme

Quantização não Uniforme

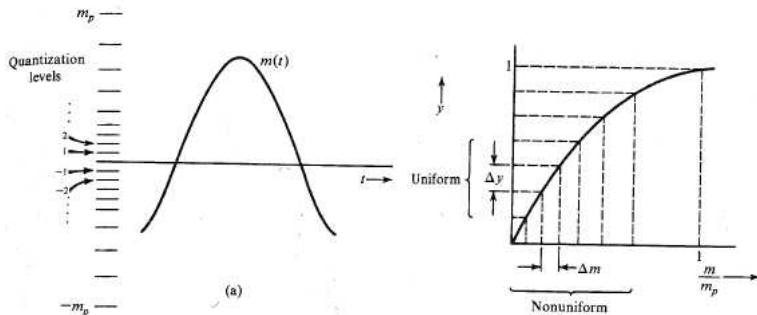


Quantização não Uniforme

- A quantização não-uniforme pode ser realizada de duas formas:
 - Usando um quantizador não-uniforme
 - Usando uma curva característica de compressão seguida de um quantizador uniforme



Quantização não Uniforme



Quantização não Uniforme

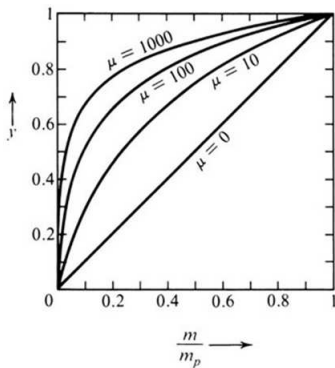
- As técnicas de compressão mais conhecidas são conhecidas como lei μ e lei A (simetria ímpar)
- A lei μ para amplitudes positivas é dada por:

$$y = \frac{1}{\ln(1 + \mu)} \ln \left(1 + \frac{\mu m}{m_p} \right), \quad 0 \leq \frac{m}{m_p} \leq 1$$

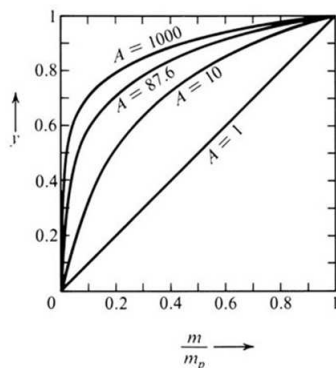
- A lei A para amplitudes positivas é dada por:

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{A}{1 + \ln A} \left(\frac{m}{m_p} \right), & 0 \leq \frac{m}{m_p} \leq \frac{1}{A} \\ \frac{A}{1 + \ln A} \left(1 + \ln \frac{Am}{m_p} \right), & \frac{1}{A} \leq \frac{m}{m_p} \leq 1 \end{array} \right\}$$

Quantização não Uniforme



(a)

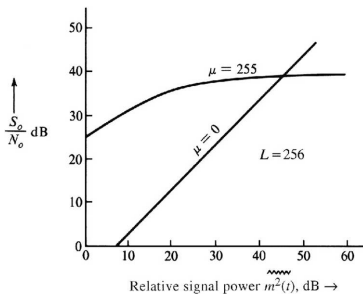


(b)

Quantização não Uniforme

- O nível de compressão é controlado pelo parâmetro μ ou A
- Para alcançar uma SNR constante, o valor de $\mu = 255$ é usado para 256 níveis (8 bits por amostra)
- Para esses valores, a SNR é aproximada por:

$$\frac{S_o}{N_o} \simeq \frac{3L^2}{[\ln(1 + \mu)]^2}, \quad \mu^2 \gg \frac{m_p^2}{P_m}$$



Taxa Máxima de Informação

- É importante em comunicações digitais conhecer a taxa máxima de informação que pode ser enviada através de um canal com largura de banda de B Hz
- Uma justificativa mais coerente para os resultados mostrados a seguir pode ser dada ao se estudar o efeito da Interferência Intersimbólica
- Em um canal livre de erros, sem ruído e com largura de banda de B Hz podem ser transmitidos no máximo $2B$ pedaços independentes de informação por segundo
 - Dois pedaços de informação por segundo para cada Hertz de largura de banda
 - Com $2B$ amostras por segundo é possível reconstruir o sinal amostrado

Largura de Banda

- Para o PCM binário, n bits são associados a L níveis de quantização

$$L = 2^n, \quad n = \log_2 L$$

- Cada amostra é codificada em n bits
- Se $m(t)$ tem banda B , são necessárias $2B$ amostras para a reconstrução ou $2nB$ bps ($2nB$ pedaços de informação por segundo)
- Se em 1Hz se pode transmitir 2 pedaços de informação, então para transmitir $2nB$ pedaços é necessário uma banda teórica mínima de

$$B_T = nB\text{Hz}$$

Largura de Banda

- A equação anterior é válida para uma amostragem na taxa de Nyquist
- Se a taxa de amostragem é maior que a de Nyquist, então a expressão da largura de banda teórica mínima para a transmissão é

$$B_{min} = \frac{R}{2}$$

- Nessa expressão, R é a taxa de transmissão em símbolos por segundo
- Se a transmissão for binária, então R é dado em bits por segundo

Largura de Banda e SNR

- Para o PCM binário, $L = 2^n \implies L^2 = 2^{2n}$ e assim:

$$\frac{S_o}{N_o} = c(2)^{2n} = c(2)^{2B_T/B}$$

- Em que:

$$c = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3P_M}{m_p^2}, & \text{Sem compressão} \\ \frac{3}{[\ln(1+\mu)]^2}, & \text{Com compressão} \end{array} \right\}$$

- A SNR cresce exponencialmente com a largura de banda da transmissão B_T

Largura de Banda e SNR

- Em dB, tem-se:

$$\begin{aligned}\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{dB} &= 10 \log_{10} \left(\frac{S_o}{N_o}\right) \\ &= 10 \log_{10} [c(2)^{2n}] \\ &= 10 \log_{10} c + 20n \log_{10} 2 \\ &= (\alpha + 6n)dB\end{aligned}$$

- Em que $\alpha = 10 \log_{10} c$
- Assim, o aumento de um bit proporciona um aumento de 6dB na SNR (quadruplica)