Amostragem e Conversão A/D

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/˜edmar.nascimento

October 10, 2020

Introdução

- O processo de digitalização de um sinal analógico consiste em duas etapas básicas: amostragem e quantização
- No processo de amostragem, obtém-se amostras do sinal em instantes de tempo discretos
- Na etapa de quantização, as amostras em tempo discretos obtidas são mapeadas para um alfabeto finito
- O sinal digital consiste então de uma sequência de símbolos discretos (números)
- Esses números podem ainda ser representados em outros sistemas de numeração como o binário

Teorema da Amostragem

- O teorema da amostragem estabelece condições para que um sinal analógico possa ser recuperado a partir de suas amostras
- Um sinal $g(t)$ cujo espectro é limitado em banda a B Hz (ou seja, $G(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$) pode ser reconstruído a partir de suas amostras se ele for amostrado a uma frequência f_s superior a 2B Hz
  - $f_s > 2B$ ou $T_s = 1/f_s < 1/(2B)s$
- A prova desse teorema pode ser feita reconstruindo-se $g(t)$ a partir de suas amostras usando um trem de impulsos $\delta_{T_s}(t)$ com período T_s

Teorema da Amostragem

- O sinal amostrado $\overline{g}(t)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\overline{g}(t) &= g(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t - nT_s)\end{aligned}$$

- Como $\delta_{T_s}(t)$ é periódico, a sua expansão em séries de Fourier resulta em

$$\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s}[1 + 2\cos\omega_s t + 2\cos 2\omega_s t + \cdots]$$

- Assim o sinal amostrado $\overline{g}(t)$ pode ser reescrito como

$$\overline{g}(t) = \frac{1}{T_s}[g(t) + 2g(t)\cos\omega_s t + 2g(t)\cos 2\omega_s t + \cdots]$$

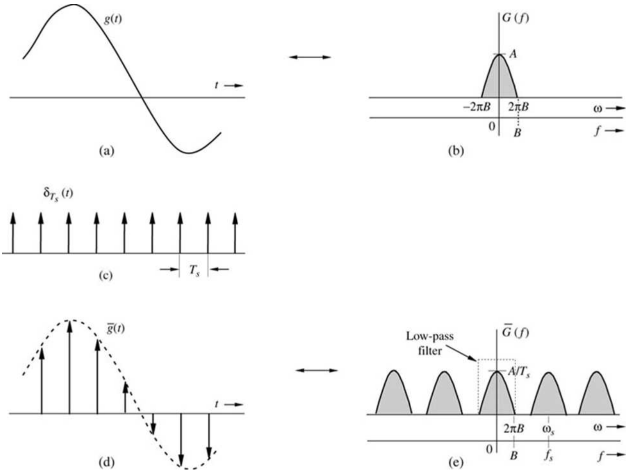
Teorema da Amostragem

- O espectro de $\overline{g}(t)$ denotado por $\overline{G}(\omega)$ é dado então por

$$\begin{aligned}\overline{G}(\omega) &= \frac{1}{T_s}[G(\omega) + G(\omega - \omega_s) + G(\omega + \omega_s) + \\ &\quad G(\omega - 2\omega_s) + G(\omega + 2\omega_s) + \cdots] \\ &= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_s)\end{aligned}$$

- Para que se possa reconstruir $g(t)$ a partir de $\overline{g}(t)$ é necessário que as réplicas de $G(\omega)$ não se sobreponham, ou seja, que $\omega_s > 2(2\pi B)$ ou $f_s > 2B$
- A taxa mínima de amostragem $f_s = 2B$ é denominada de *taxa de Nyquist* e o período máximo $T_s = 1/(2B)$ de *intervalo de Nyquist*

Sinal Amostrado e o seu Espectro



Reconstrução Exata

- Conforme observado na prova do teorema, a reconstrução do sinal analógico pode ser feita gerando-se um trem de impulsos com amplitudes iguais as das amostras e passando-se o sinal através de um filtro passa-baixas com banda B Hz
- No domínio do tempo, esta operação pode ser obtida considerando-se um filtro

$$h(t) \;=\; 2BT_s sinc(2\pi Bt) \Longleftrightarrow H(\omega) = T_s rect\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right)$$

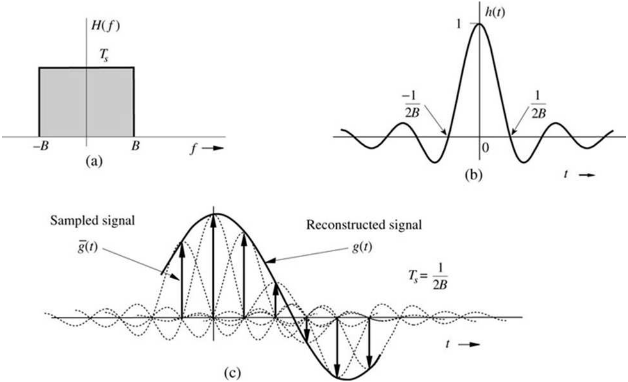
Reconstrução Exata

- Se $T_s = 1/(2B)$, então a reconstrução exata do sinal é dada pela *fórmula de interpolação*

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \sum_k g(kT_s)\delta(t - kT_s) * h(t) = \sum_k g(kT_s)h(t - kT_s) \\
&= \sum_k g(kT_s)sinc[2\pi B(t - kT_s)] \\
&= \sum_k g(kT_s)sinc(2\pi Bt - k\pi)
\end{aligned}
$$

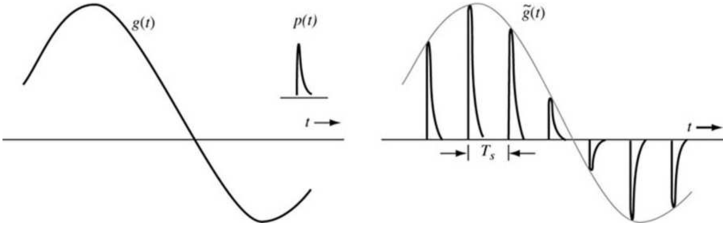
- Cabe relembrar que um sistema com esse $h(t)$ não é fisicamente realizável

Reconstrução Exata



Reconstrução Prática de Sinais

- Como será mostrado adiante, pulsos províodicos genéricos podem ser usados para reconstruir um sinal a partir de suas amostras
- Nesse tipo de reconstrução, a característica não ideal do pulso é compensada por um filtro equalizador



Reconstrução Prática de Sinais

- O sinal reconstruído a partir de pulsos $p(t)$ é representado por

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &\triangleq \sum_n g(nT_S)p(t-nT_S) \\ &= p(t) * \left[\sum_n g(nT_S)\delta(t-nT_S)\right] = p(t) * \bar{g}(t)\end{aligned}$$

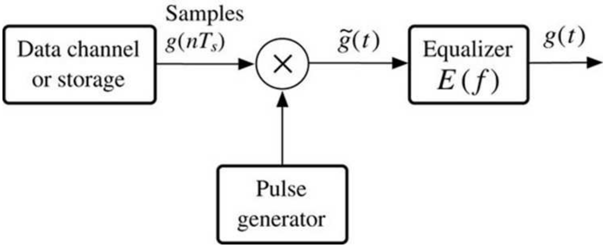
- No domínio da frequência, tem-se que

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) \Longleftrightarrow \tilde{G}(f) &= P(f)\frac{1}{T_S}\sum_n G(f-nf_S) \\ &= P(f)\left[G(f)\frac{1}{T_S} + \frac{1}{T_S}\sum_{n,n\neq 0} G(f-nf_S)\right]\end{aligned}$$

Reconstrução Prática de Sinais

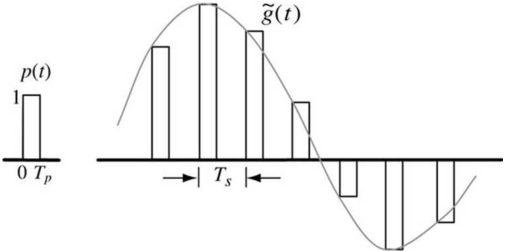
- Para que $g(t)$ seja recuperado, é necessário equalizar o sinal com um filtro $E(f)$, de modo que:

$$
\begin{aligned}
G(f) &= E(f)\tilde{G}(f) \\
E(f)P(f) &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & |f| > f_S - B \\ T_S & |f| < B \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$



Reconstrução Prática de Sinais

- Quando os pulsos $p(t)$ são pulsos retangulares, tem-se um sistema de retenção de ordem zero (*zero-order hold*)
- Nesse caso, o sinal reconstruído a partir de suas amostras tem o formato indicado abaixo

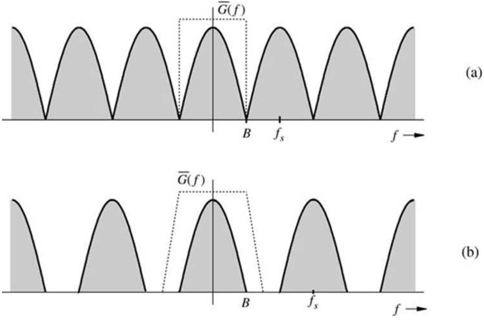


- Aproximações melhores podem ser obtidas através de um filtro de retenção de primeira ordem

Dificuldades na Reconstrução

- Quando se utiliza a frequência de Nyquist na amostragem, se requer um filtro passa-baixas ideal (irrealizável) na reconstrução
- Quando há uma separação maior entre as bandas ($f_s > 2B$), é mais fácil projetar filtros para recuperar o sinal $g(t)$
- Sendo assim, há um compromisso entre o projeto do filtro e a escolha da frequência de amostragem

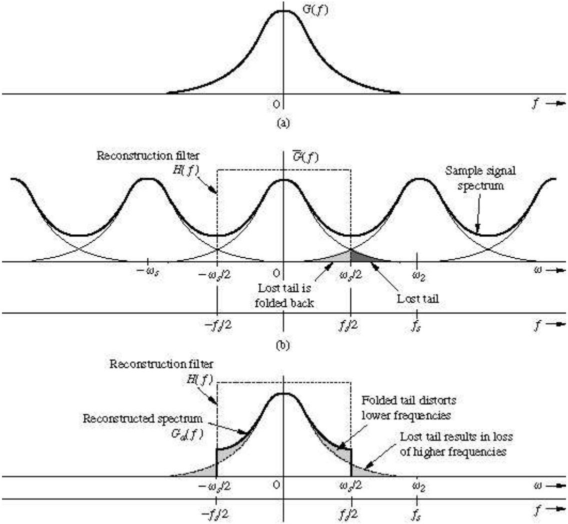
Dificuldades na Reconstrução



Dificuldades na Reconstrução

- Outro problema que surge é que os sinais práticos não são limitados em banda
- Isso significa que as componentes do sinal acima de $\omega_s/2$ são perdidas e também interferem ao mesmo tempo no sinal recuperado
- Esse fenômeno é conhecido como mascaramento (*aliasing*), também conhecido como dobra espectral (*spectral folding*)

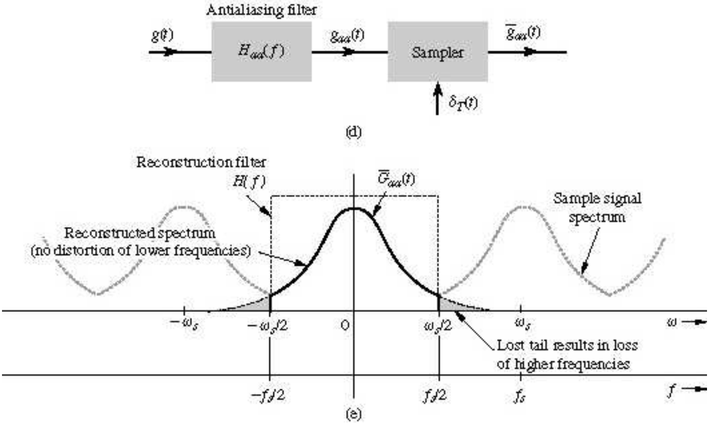
Mascaramento



Mascaramento

- Várias técnicas podem ser usadas para lidar com esse problema
  - Aumentar a frequência de amostragem
  - Eliminar uma porção do espectro antes da amostragem (filtro antialiasing) (pré-filtragem)
  - Eliminar a porção comprometida do espectro do sinal amostrado (filtro antialiasing) (pós-filtragem)

Mascaramento



Amostragem Prática

- Anteriormente, foi admitido que os valores das amostras $g(kT_S)$ nos instantes kT_S eram perfeitamente conhecidos
- A partir dessas amostras se poderia reconstruir o sinal analógico utilizando pulsos periódicos e filtros equalizadores
- Entretanto, conhecer o valor real de uma amostra no instante kT_S é como conhecer precisamente o valor da velocidade instantânea de um móvel
- Na prática, o valor da amostra é inferido a partir de um intervalo de duração não nula T_p

Amostragem Prática

- O valor da amostra pode ser a simples média dos valores no intervalo ou a média com algum tipo de ponderação

$$g_1(kT_S) = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} g(kT_S + t)dt$$

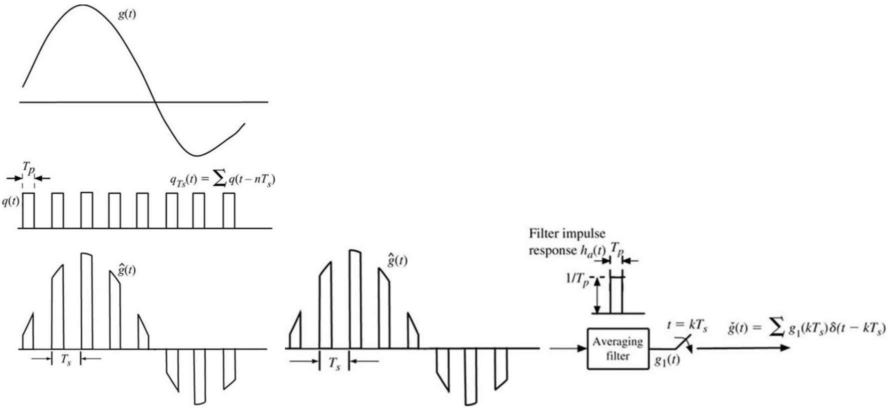
- Em termos gerais, o valor da amostra no instante kT_S pode ser representado por

$$g_1(kT_S) = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} q(t)g(kT_S + t)dt$$

- Assim, o amostrador prático gera sinais da forma

$$\check{g}(t) = \sum g_1(kT_S)\delta(t - kT_S)$$

Amostragem Prática



Amostragem Prática

- Assim como na reconstrução do sinal por pulsos, a natureza da distorção introduzida pela amostragem prática é conhecida e pode ser eliminada com o uso de filtros equalizadores
- Quando se utiliza ponderação uniforme, pode-se mostrar que um sinal de banda B é distorcido pelo termo $F_0(f)$ dado por

$$F_0(f) = \frac{1}{T_S} \sum_n Q_n sinc[\pi(f + nf_S)T_p]$$

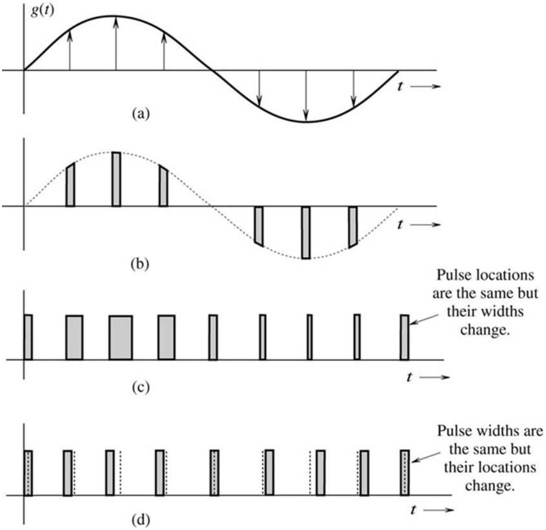
- Na reconstrução do sinal analógico $g(t)$, um equalizador $E(f)$ que corrija os efeitos da amostragem não ideal $F_0(f)$ e da reconstrução não ideal $P(f)$ deve garantir que

$$E(f)P(f)F_0(f) = 1, \ |f| < B$$

Aplicações do Teorema da Amostragem

- Com a amostragem, um sinal contínuo pode ser representado por uma sequência de números
- Pode-se utilizar o valor das amostras para variar os parâmetros de um trem de pulsos periódico
  - Amplitude - (PAM - Pulse-Amplitude Modulation)
  - Largura - (PWM - Pulse-Width Modulation)
  - Posição - (PPM - Pulse-Position Modulation)
  - PCM - Pulse-Code Modulation

Sinais Modulados em Pulso



Sinais Modulados em Pulso

- Com as modulações de pulso, pode-se utilizar a multiplexação por divisão de tempo (TDM)