

Modulação em Ângulo

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

October 4, 2020

Introdução

- Na modulação em amplitude, a amplitude da portadora é variada de acordo com o sinal modulante
- Também é possível variar a frequência ou a fase da portadora de acordo com o sinal modulante
 - FM - *Frequency Modulation*
 - PM - *Phase Modulation*
- FM e PM são casos particulares do que é conhecido como **modulação em ângulo** ou **modulação exponencial**

Frequência Instantânea

- Um sinal senoidal generalizado pode ser definido como:

$$\varphi(t) = A \cos \theta(t)$$

- Em que $\theta(t)$ é denominado de ângulo generalizado
- Para uma senóide convencional, tem-se que:

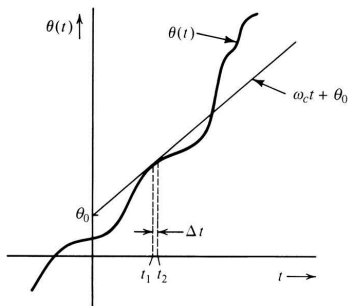
$$\varphi(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_0)$$

- Nesse caso, $\theta(t)$ é uma linha reta com inclinação ω_c
- Dependendo do ângulo $\theta(t)$, a modulação em ângulo recebe nomes especiais

Frequência Instantânea

- Sob um pequeno intervalo Δt , a frequência de $\varphi(t)$ é ω_c
- A **frequência instantânea** é definida como a inclinação de $\theta(t)$, ou seja:

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad \theta(t) = \int_{-\infty}^t \omega_i(\alpha) d\alpha$$



Modulação em Fase

- Modulação em fase (PM)

$$\theta(t) = \omega_c t + \theta_0 + k_p m(t)$$

- Pode-se considerar $\theta_0 = 0$, sem perda de generalidade
- O sinal modulado em fase é então dado pela expressão:

$$\varphi_{PM}(t) = A \cos[\omega_c t + k_p m(t)]$$

- Em PM, a frequência instantânea é dada por:

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_p \dot{m}(t)$$

Modulação em Frequência

- Modulação em frequência

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t [\omega_c + k_f m(\alpha)] d\alpha = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$$

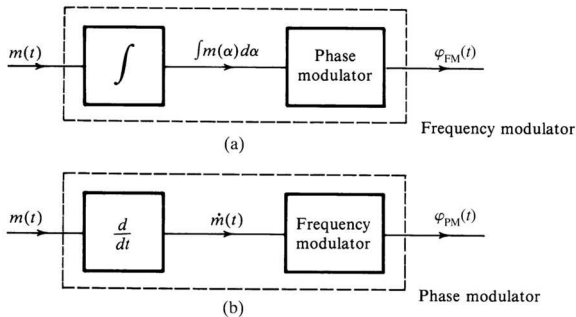
$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t)$$

$$\varphi_{FM}(t) = A \cos \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \right]$$

- Pode-se observar que a frequência instantânea varia de acordo com o sinal modulante
 - Diretamente proporcional a $m(t)$ em FM
 - Diretamente proporcional à derivada de $m(t)$ em PM

FM e PM

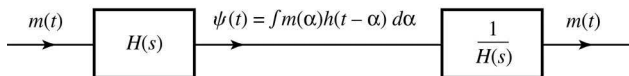
- As modulações em fase e em frequência podem ser obtidas uma a partir da outra



Modulação em Ângulo

- FM e PM são casos particulares da modulação exponencial
- No caso geral, tem-se que:

$$\begin{aligned}\varphi_{EM}(t) &= A \cos [\omega_c t + \psi(t)] \\ &= A \cos \left[\omega_c t + \int_{-\infty}^t m(\alpha) h(t - \alpha) d\alpha \right]\end{aligned}$$



- Se $h(t) = k_p \delta(t)$ tem-se a modulação PM
- Se $h(t) = k_f u(t)$ tem-se a modulação FM

Largura de Banda

- A modulação FM foi desenvolvida com o objetivo de reduzir o efeito do ruído
 - Procurava-se reduzir a banda e consequentemente, o ruído
 - Entretanto, FM possui uma banda maior ou igual a AM
 - Mesmo assim, o seu desempenho é melhor
- Como as modulações em ângulo não são lineares, é bem mais complicado obter expressões para a largura de banda
- Em FM e PM podem ser considerados dois casos para análise:
 - FM/PM de banda estreita (NBFM - Narrow-band FM; NBPM - Narrow-band PM)
 - FM/PM de banda larga (WBFM - Wide-band FM; WBPM - Wide-band PM)

FM/PM de Banda Estreita

- Seja

$$\begin{aligned}a(t) &= \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \\ \hat{\varphi}_{FM}(t) &= Ae^{j[\omega_c t + k_f a(t)]} = Ae^{jk_f a(t)} e^{j\omega_c t}\end{aligned}$$

- Então,

$$\varphi_{FM}(t) = \text{Re}\{\hat{\varphi}_{FM}(t)\}$$

- Expandindo-se $e^{jk_f a(t)}$ em séries de potência, tem-se:

$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = A \left[1 + jk_f a(t) - \frac{k_f^2}{2!} a^2(t) + \cdots + j^n \frac{k_f^n}{n!} a^n(t) + \right] e^{j\omega_c t}$$

FM/PM de Banda Estreita

- Então o sinal FM é dado por:

$$\begin{aligned}\varphi_{FM}(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{\varphi}_{FM}(t)\} \\ &= A \left[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t - \frac{k_f^2}{2!} a^2(t) \cos \omega_c t \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_f^3}{3!} a^3(t) \sin \omega_c t + \dots \right]\end{aligned}$$

- Se $m(t)$ tem banda B , então $a(t)$ também tem banda B
- Os termos $a^2(t)$, $a^3(t)$ e $a^n(t)$ possuem larguras de banda $2B$, $3B$ e nB , respectivamente
- Se $|k_f a(t)| \ll 1$, então os termos de ordem superior podem ser desprezados

FM/PM de Banda Estreita

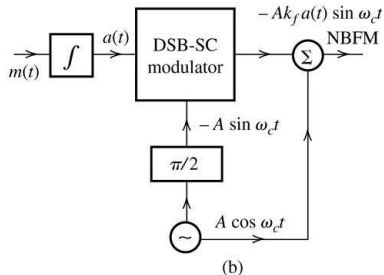
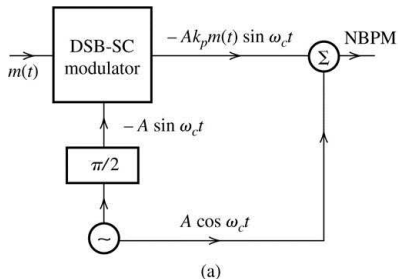
- Sendo assim, o sinal FM de banda estreita pode ser aproximado por:

$$\varphi_{FM}(t) \simeq A \left[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t \right]$$

- Nesse caso, a banda do sinal FM é $2B$, igual ao AM
- Para PM, um resultado similar pode ser obtido, resultando em:

$$\varphi_{PM}(t) \simeq A \left[\cos \omega_c t - k_p m(t) \sin \omega_c t \right]$$

FM/PM de Banda Estreita



FM/PM de Banda Larga

- Se a aproximação $|k_f a(t)| \ll 1$ não é satisfeita, então a expressão obtida para o NBFM/NBPM não é mais válida
- As expressões para o FM e PM banda larga estão relacionadas com a variação da frequência instantânea

$$f_i(t) - f_c = \frac{k_f}{2\pi} m(t) \text{ (FM)}$$

$$f_i(t) - f_c = \frac{k_p}{2\pi} \dot{m}(t) \text{ (PM)}$$

- Para o FM de banda larga, uma boa aproximação da largura de banda é dada pela **Regra de Carson**

Regra de Carson (FM)

- Seja B a banda de $m(t)$ e k_f a constante do FM, então:

$$B_{FM} = 2(\Delta f + B)$$

- Δf representa o **desvio em frequência máximo** da portadora em Hertz, sendo dado por:

$$\Delta f = \frac{k_f m_p}{2\pi}$$

- Em radianos, pode-se obter uma expressão similar com $W = 2\pi B$:

$$W_{FM} = 2(\Delta\omega + W)$$

- Sendo que $\Delta\omega$ representa o **desvio em frequência** da portadora em rad/s dado por:

$$\Delta\omega = k_f m_p$$

Regra de Carson (FM)

- A partir da regra de Carson, podem ser considerados dois casos específicos

- $\Delta f \gg B$ (Banda bem larga)

$$B_{FM} \simeq 2\Delta f$$

- $\Delta f \ll B$ (Banda estreita)

$$B_{FM} \simeq 2B$$

- Uma outra forma de expressar a regra de Carson é através do **índice de modulação FM** denotado por β

$$\beta = \frac{\Delta f}{B}$$

Regra de Carson (PM)

- Tem-se que:

$$B_{FM} = 2B(\beta + 1)$$

- Para a modulação em fase, as fórmulas anteriores são válidas necessitando-se apenas substituir o desvio em frequência por:

$$\Delta\omega = k_p m'_p, \quad \Delta f = \frac{k_p m'_p}{2\pi}$$

- Sendo,

$$m'_p = [\dot{m}(t)]_{max}$$

Modulação de um Tom

- A validade da regra de Carson pode ser verificada para o caso da modulação de um tom, ou seja:

$$m(t) = \alpha \cos \omega_m t$$

- Nesse caso,

$$\begin{aligned}a(t) &= \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha = \frac{\alpha}{\omega_m} \sin \omega_m t \\ \hat{\varphi}_{FM}(t) &= A e^{j[\omega_c t + k_f \frac{\alpha}{\omega_m} \sin \omega_m t]} \\ \Delta\omega &= k_f m_p = \alpha k_f \\ \beta &= \frac{\Delta f}{B} = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\alpha k_f}{\omega_m}\end{aligned}$$

Modulação de um Tom

- Pode-se então reescrever $\hat{\varphi}_{FM}(t)$ como

$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = Ae^{j[\omega_c t + \beta \sin \omega_m t]} = Ae^{j\omega_c t} (e^{j\beta \sin \omega_m t})$$

- A segunda exponencial é um sinal periódico com período $2\pi/\omega_m$ que pode ser escrito na forma exponencial das séries de Fourier, resultando em:

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_m t}$$

- Com coeficientes dados por:

$$C_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m} e^{j\beta \sin \omega_m t} e^{-jn\omega_m t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx$$

Modulação de um Tom

- Essa integral é denominada de **função de Bessel do primeiro tipo e n-ésima ordem** e denotada por $J_n(\beta)$
 - $J_n(\beta)$ não pode ser resolvida analiticamente
 - Entretanto, os seus valores podem ser encontrados em tabelas
- Assim, tem-se:

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j\omega_m t}$$

$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(\omega_c t + n\omega_m t)}$$

$$\varphi_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

Modulação de um Tom

- Como $J_n(\beta)$ é desprezível para $n > \beta + 1$, então a quantidade de bandas significativas é $\beta + 1$ e tem-se:

$$B_{FM} = 2nf_m = 2(\beta + 1)f_m = 2(\Delta f + B)$$

