# Espectro de Sinais

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

*www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento*

September 18, 2020

# Sinais

- Um sinal representa um conjunto de informações ou dados
- Matematicamente, sinais são funções de uma ou mais variáveis
- Fisicamente, sinais podem representar uma tensão ou uma corrente elétrica
- Os modelos de sinais abordados neste curso são funções do tempo, representados como $g(t)$ por exemplo
- A força de um sinal pode ser calculada através da
  - Energia de um sinal
  - Potência de um sinal

# Energia e potência

- A energia de $g(t)$ representada por $E_g$ é definida como:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

- A potência de $g(t)$ representada por $P_g$ é definida como:

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt$$

- $P_g$ equivale à energia média de $g(t)$
- Ainda define-se o valor RMS de $g(t)$ como $\sqrt{P_g}$

# Potência de sinais periódicos

- Um sinal é periódico se para alguma constante positiva $T_0$,

$$g(t) = g(t + T_0) \ \ \forall t$$

- O menor valor de $T_0$ é o período de $g(t)$
- Quando $g(t)$ é periódico, então $P_g$ pode ser calculada a partir da expressão:

$$P_g = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |g(t)|^2 dt$$

# Análise de Fourier

- Para analisar o comportamento de sinais no domínio da frequência utilizaremos as séries e transformadas de Fourier
  - Séries de para sinais periódicos
  - Transformadas para sinais aperiódicos e periódicos
- A representação de um sinal em séries de Fourier pode ser feitas em diversas bases de funções ortonormais
  - Senos e cossenos
  - Cossenos
  - Exponenciais complexas

# Série Trigonométrica

- Seja $x(t)$ um sinal periódico com período $T_0$
- $x(t)$ pode ser representado em séries de Fourier como:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- Sendo,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

# Série Trigonométrica Compacta

- A série de Fourier pode ser escrita na forma compacta como:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(n\omega_0 t + \theta_n\right)$$

- Sendo os coeficientes $C_0$, $C_n$ e $\theta_n$ obtidos a partir de $a_0$, $a_n$ e $b_n$ de acordo com as relações

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 \\ C_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n &= \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \end{aligned}$$

# Série Exponencial de Fourier

- A série exponencial de Fourier é dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$
$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

- Pode-se mostrar que:

$$D_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{C_n}{2}e^{j\theta_n} \text{ e } D_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{C_n}{2}e^{-j\theta_n}, \;\; n \in \mathbb{N}$$

- Além disso, $a_0 = C_0 = D_0$

# Teorema de Parseval

- O teorema de Parseval permite calcular a potência de um sinal a partir das componentes da série de Fourier
- Segundo o teorema de Parseval, a potência de um sinal periódico $x(t)$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
P_x &= C_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \\
P_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2 = D_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2
\end{aligned}
$$

- Este teorema é particularmente útil se avaliar o peso de cada harmônica em um sinal periódico qualquer

# Transformada de Fourier

- Para um sinal $g(t)$, tem-se:
  - $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$ e $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$
  - $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt \\ g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \end{aligned}$$

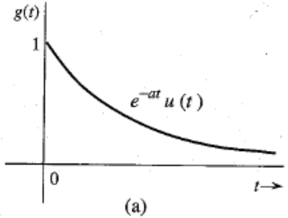
# Amplitude e Fase do Espectro

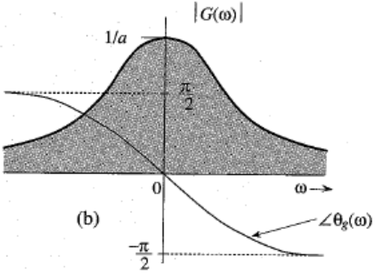
- $G(\omega)$ é em geral uma função complexa de $\omega$
- $G(\omega) = |G(\omega)|e^{j\theta_g}$
- Quando $g(t)$ é real, tem-se:

$$G(-\omega) \;=\; G^*(\omega) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} |G(\omega)| = |G(-\omega)| \\ \theta_g(\omega) = -\theta_g(-\omega) \end{array} \right\}$$

# Transformadas de algumas funções

- $g(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \Leftrightarrow G(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} e^{-j \arctan{(\omega/a)}}$

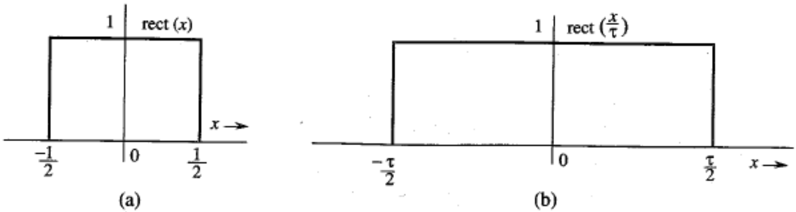


# Transformadas de algumas funções

- A função retangular (*Unit Gate*) é definida como:

$$\Pi(\frac{x}{\tau}) \quad = \quad rect(\frac{x}{\tau}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & |x| > \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{\tau}{2} \\ 1, & |x| < \frac{\tau}{2} \end{array} \right\}$$

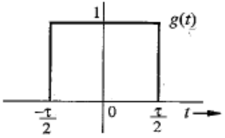


# Transformadas de algumas funções

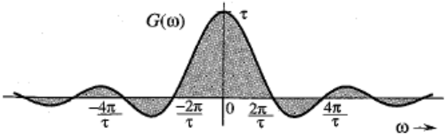
$$g(t) = rect(\frac{t}{\tau}) \iff G(\omega) = \frac{\tau \sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} = \tau sinc(\frac{\omega\tau}{2})$$

- A função $sinc(x) = \frac{\sin x}{x}$ possui as seguintes propriedades:
  - $sinc(x) = sinc(-x)$
  - $sinc(x) = 0 \Longrightarrow \sin x = 0, x \neq 0 \Longrightarrow x = \pm n\pi; n = \{1, 3, \cdots\}$
  - $sinc(0) = 1$
  - $sinc(x)$ é uma função com período $2\pi$ que decresce de acordo com $1/x$

## Transformadas de algumas funções



(a)



(b)

- O espectro do pulso retangular se estende até infinito (largura de banda infinita)
- Uma estimativa grosseira: $2\pi/\tau$ rad/s ou $1/\tau$Hz

# Transformadas de algumas funções

- Impulso no tempo

$$\delta(t) \iff 1$$

- Impulso em frequência

$$1 \iff 2\pi\delta(\omega)$$

- Impulso em frequência deslocado

$$\begin{aligned} e^{j\omega_0 t} &\iff 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ e^{-j\omega_0 t} &\iff 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

# Transformadas de algumas funções

- Cosseno

$$
\begin{aligned}
\cos \omega_0 t &= \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\
\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]
\end{aligned}
$$

- Seno

$$
\begin{aligned}
\sin \omega_0 t &= \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \\
\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= \pi j[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]
\end{aligned}
$$

# Propriedades da Transformada de Fourier

- Simetria

$$
\begin{aligned}
g(t) &\Longleftrightarrow G(\omega) \\
G(t) &\Longleftrightarrow 2\pi g(-\omega)
\end{aligned}
$$

- Scaling

$$
\begin{aligned}
g(t) &\Longleftrightarrow G(\omega) \\
g(at) &\Longleftrightarrow \frac{1}{|a|} G(\frac{\omega}{a})
\end{aligned}
$$

  - $a > 1$, compressão no tempo resulta na expansão em frequência
  - $a < 1$, expansão no tempo resulta na compressão em frequência

# Propriedades da Transformada de Fourier

- Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned} g(t) &\iff G(\omega) \\ g(t - t_0) &\iff e^{-j\omega t_0} G(\omega) \end{aligned}$$

- Deslocamento em frequência

$$\begin{aligned} g(t) &\iff G(\omega) \\ g(t)e^{j\omega_0 t} &\iff G(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

- Modulação

$$g(t) \cos \omega_0 t \iff \frac{1}{2}[G(\omega - \omega_0) + G(\omega + \omega_0)]$$

# Propriedades da Transformada de Fourier

- Convolução

$$g(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)w(t-\tau)d\tau$$

- Seja $g_1(t) \iff G_1(\omega)$ e $g_2(t) \iff G_2(\omega)$
- Convolução no tempo

$$g_1(t) * g_2(t) \iff G_1(\omega)G_2(\omega)$$

- Convolução em frequência

$$g_1(t)g_2(t) \iff \frac{1}{2\pi}G_1(\omega) * G_2(\omega)$$

# Propriedades da Transformada de Fourier

- Diferenciação no tempo

$$
\begin{aligned}
g(t) &\iff G(\omega) \\
\frac{dg(t)}{dt} &\iff j\omega G(\omega)
\end{aligned}
$$

- Integração no tempo

$$
\begin{aligned}
g(t) &\iff G(\omega) \\
\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau &\iff \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)
\end{aligned}
$$

# Densidade Espectral de Energia

- Para um sinal de energia $g(t)$, a energia de pode ser calculada a partir do teorema de Parseval como:

$$E_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

- A partir da expressão de Parseval verifica-se que a energia pode ser obtida através da área do gráfico de $|G(\omega)|^2$

# Densidade Espectral de Energia

- A densidade espectral de energia é definida como

$$\Psi_g(\omega) = |G(\omega)|^2 \text{ ou } \Psi_g(f) = |G(f)|^2$$

- Assim, tem-se que:

$$E_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_g(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_g(f)df$$

- Para um sistema LIT em que $y(t) = h(t) * g(t)$, então:

$$\Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2\Psi_g(\omega)$$

# Largura de Banda Essencial

- O espectro da maioria dos sinais se estende até o infinito
- Entretanto, como a energia é em geral finita, o espectro de amplitude tende a zero quando $\omega \to \infty$
- Pode-se então suprimir as componentes acima de $B$ Hz ($2\pi B$ rad/s) com pouco efeito no sinal original
- Segundo esse critério, a largura de banda $B$ é chamada de largura de banda essencial
- O critério para estimar $B$ depende da aplicação considerada
  - Faixa de frequência que contém 95% da energia do sinal

# Autocorrelação Temporal

- A autocorrelação de um sinal real $g(t)$ é definida como

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t-\tau)dt$$

- A autocorrelação é uma função par
- A transformada de Fourier da função de autocorrelação é a densidade espectral de energia

$$\psi_g(\tau) \iff \Psi_g(\omega) = |G(\omega)|^2$$

# Densidade Espectral de Potência

- Para um sinal de potência $g(t)$, vimos que a potência pode ser interpretada como a energia média
- Se $g_T(t)$ é uma versão truncada de $g(t)$ com energia $E_{gT}$

$$g_T(t) = \left\{ \begin{array}{ll} g(t) & , |t| \leq T/2 \\ 0 & , |t| > T/2 \end{array} \right\}$$

- Então,

$$P_g = \lim_{T \to \infty} \frac{E_{gT}}{T}$$

# Densidade Espectral de Potência

- A potência de $g(t)$ pode ser calculada como:

$$P_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|G_T(\omega)|^2}{T}d\omega$$

- Definindo-se a Densidade Espectral de Potência (DEP - PSD em inglês) de $g(t)$ como:

$$S_g(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|G_T(\omega)|^2}{T}$$

- Então, a potência pode ser expressada como:

$$P_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_g(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}S_g(f)df$$

# Autocorrelação de Sinais de Potência

- A autocorrelação no tempo para um sinal de potência real $g(t)$ é definida como

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_g(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t+\tau)dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t-\tau)dt\end{aligned}$$

- $\mathcal{R}_g(\tau)$ é uma função par

# Autocorrelação de Sinais de Potência

- Como

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} g_T(t)g_T(t+\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\psi_{g_T}(\tau)}{T}$$

- Tem-se que

$$\mathcal{R}_g(\tau) \iff \lim_{T\to\infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} = S_g(\omega)$$

- A relação entre a DEP da saída de um sistema LIT e a DEP da entrada é dada por

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega)$$