

Princípios de Comunicação

Lista de Exercícios - Semestre 2017.2

Data limite de entrega: 11/04/2018 - Peso: 40% da 3ª nota

Obs.: 1 - A entrega deve ser individual, embora seja permitida a colaboração entre os alunos; 2 - Quem não entregar terá a sua prova corrigida com peso 10.

1. Sejam $x(t)$ e $y(t)$ dois processos estacionários no sentido amplo (ESA) independentes. Definindo-se $z(t) = x(t)y(t)$. Determine se $z(t)$ é ESA e mostre a seguinte relação entre as densidades espectrais de potência:

$$S_z(f) = S_x(f) * S_y(f)$$

2. Admita que os processos aleatórios $x(t)$ e $y(t)$ são individualmente e conjuntamente estacionários.
- (a) Determine a função de autocorrelação de $z(t) = x(t) + y(t)$.
 - (b) Determine a função de autocorrelação de $z(t)$ quando $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados.
 - (c) Determine a função de autocorrelação de $z(t)$ quando $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados e possuem média nula cada um.
3. Quando $x(t)$ é um processo real, gaussiano e estacionário com média nula e autocorrelação $R_X(\tau)$, a função de autocorrelação do processo $y(t) = x^2(t)$ é dada por $R_Y(\tau) = R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau)$. Diante disso, calcule a densidade espectral de potência $S_Y(\omega)$ quando o processo $x(t)$ corresponde ao ruído branco passa-baixas (banda B Hertz) gaussiano.
4. Um processo estocástico $z(t)$ é definido da seguinte forma:

$$z(t) = x \cos(2\pi f_c t) - y \sin(2\pi f_c t),$$

em que x e y são variáveis aleatórias. Mostre que $z(t)$ é ESA se $E\{x\} = E\{y\} = E\{xy\} = 0$ e $E\{x^2\} = E\{y^2\} = \sigma^2$.

5. Um sinal $x(t)$ é transmitido através de um canal de comunicação cujo efeito consiste em adicionar ruído $n(t)$. O sinal recebido é da forma $y(t) = A[x(t) + n(t)]$. Sabe-se que $x(t)$ é um processo aleatório de média nula e função de autocorrelação:

$$R_x(t_1, t_2) = 2e^{-|t_1 - t_2|}.$$

O ruído $n(t)$ também é um processo aleatório de média nula, independente de $x(t)$ e possui função de autocorrelação:

$$R_n(t_1, t_2) = \frac{\text{sinc}[\pi(t_1 - t_2)]}{4}.$$

Determine o ganho A do amplificador de tal modo que o erro médio quadrático, $E[(y(t) - x(t))^2]$, cometido ao estimar $x(t)$ pela saída $y(t)$ do amplificador, seja mínimo.

6. Um processo $x(t)$ tem média $\eta(t)$ e autocorrelação $R_x(t_1, t_2)$. O processo $x(t)$ passa por um filtro linear cuja saída é dada por:

$$y(t) = x(t) - x(t - T),$$

sendo T uma constante.

- (a) Determine a média e a autocorrelação de $y(t)$. Se $x(t)$ é ESA, pode-se afirmar que $y(t)$ é ESA?
- (b) Prove que, se o processo $x(t)$ é ESA, a seguinte relação é válida:

$$S_y(f) = 4 \sin^2(\pi f T) S_x(f).$$

7. A saída de um oscilador é descrita por um processo estocástico $x(t) = A \cos(2\pi ft - \theta)$, sendo que A é uma constante e f e θ são variáveis aleatórias independentes. A variável aleatória θ é definida por:

$$p_{\theta}(\Theta) = \begin{cases} 1/(2\pi) & , 0 \leq \Theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a DEP de $x(t)$ em termos da fdp de f . O que acontece se f assume um valor constante?

8. Um processo de ruído tem a sua densidade espectral de potência dada por

$$S_n(f) = \begin{cases} 10^{-8}(1 - \frac{|f|}{10^8}) & , |f| < 10^8 \\ 0 & , |f| > 10^8. \end{cases}$$

Este processo é passado por um filtro passa-faixas ideal com largura de banda de 2MHz centrado em 50MHz.

- Obtenha a potência do processo de saída.
 - Escreva o processo de saída em termos das componentes em fase e em quadratura e obtenha a potência de cada componente. Admita que $f_c = 50MHz$.
 - Obtenha a densidade espectral de potência das componentes em fase e em quadratura.
9. Um esquema de sinalização binária é usado em um canal AWGN com DEP do ruído branco igual a $\mathcal{N}/2$. Esse esquema usa os dois sinais equiprováveis $s_1(t)$ e $s_2(t)$ descritos abaixo e opera a uma taxa de R bits/s.

$$s_1(t) = \begin{cases} 2 & , 0 \leq t \leq T/2 \\ 1 & , T/2 < t \leq T \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t \leq T/2 \\ 2 & , T/2 < t \leq T \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Obtenha uma expressão para $E_b/\mathcal{N}$ para este sistema em função de $\mathcal{N}$ e de R .
 - Qual é a probabilidade de erro este sistema (em função de $\mathcal{N}$ e de R)?
10. (10.2-1 Lathi) Na detecção coerente de PPM binária, um pulso $p_0(t)$ de meia largura é transmitido com diferentes atrasos para dígitos binários "0" e "1", no intervalo $0 \leq t \leq T_b$. Note que

$$p_0(t) = u(t) - u(t - T_b/2).$$

A transmissão PPM binária consiste simplesmente na transmissão de: $p_0(t)$ (se "0" for transmitido) e $p_0(t - T_b/2)$ (se "1" for transmitido). O ruído do canal é AWGN com nível de espectro $\mathcal{N}/2$.

- Determine a arquitetura do receptor ótimo para esse sistema binário. Esboce o gráfico da resposta do filtro no domínio do tempo.
 - Se $P[0] = 0,4$ e $P[1] = 0,6$, determine o limiar ótimo e a resultante taxa de erro de bit.
11. (10.2-6 Lathi) Para a comunicação 4-ária, mensagens são escolhidas dentre quatro símbolos, $m_1 = 00$, $m_2 = 01$, $m_3 = 10$ e $m_4 = 11$, transmitidos por pulsos $-p(t)$, $+p(t)$, $-3p(t)$ e $+3p(t)$, respectivamente. Um filtro casado a $p(t)$ é usado no receptor. Denote a energia de $p(t)$ por E_p . O ruído de canal é AWGN com espectro $\mathcal{N}/2$.

- Seja r a saída do filtro casado em t_m . Esboce o gráfico de $p_r(r|m_i)$ (00,01,10 e 11) para os quatro símbolos de mensagens, supondo que sejam equiprováveis.
- Para minimizar a probabilidade de erro de detecção na parte (a), determine os limiares ótimos de decisão e a correspondente probabilidade de erro P_e em função da razão entre energia média de símbolo e ruído.

12. Determine se os seguintes sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ são ortogonais no intervalo $-1,5T_2 < t < 1,5T_2$, com $f_2 = 1/T_2$:

$$s_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t + \phi_1), \quad s_2(t) = A \cos(2\pi f_2 t + \phi_2),$$

para os seguintes casos:

- (a) $f_1 = f_2$ e $\phi_1 = \phi_2$.
 - (b) $f_1 = f_2/3$ e $\phi_1 = \phi_2$.
 - (c) $f_1 = f_2$ e $\phi_1 = \phi_2 + \pi/2$.
13. As bases de um espaço de sinais tridimensional são dadas por: $\varphi_1(t) = p(t)$, $\varphi_2(t) = p(t - T_o)$ e $\varphi_3(t) = p(t - 2T_o)$, sendo

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T_o}}[u(t) - u(t - T_o)].$$

- (a) Esboce os sinais $s_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, cuja representação vetorial é: $\mathbf{s}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{s}_2 = (1, -2, -1)$, $\mathbf{s}_3 = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{s}_4 = (1, 1, 1)$.
 - (b) Determine a energia de cada sinal $s_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$.
 - (c) Identifique pares de sinais ortogonais.
14. Considere uma constelação com três sinais de base:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \sqrt{2} \cos(2\pi t), \quad t \in [0, 1] \\ \varphi_2(t) &= \sqrt{2} \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 1] \\ \varphi_3(t) &= 1, \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

- (a) Mostre que os três sinais de base são ortonormais.
- (b) Esboce a constelação de sinais formada pelos quatro sinais:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 2 + 2 \cos(2\pi t) - \sqrt{2} \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 1] \\ s_2(t) &= 1 - \sqrt{2} \cos(2\pi t) - 3\sqrt{2} \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 1] \\ s_3(t) &= 2 \cos(2\pi t) + 5 \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 1] \\ s_4(t) &= 2 \cos(2\pi t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

- (c) Calcule a energia de cada um dos sinais do item (b). Determine a distância mínima da constelação.